

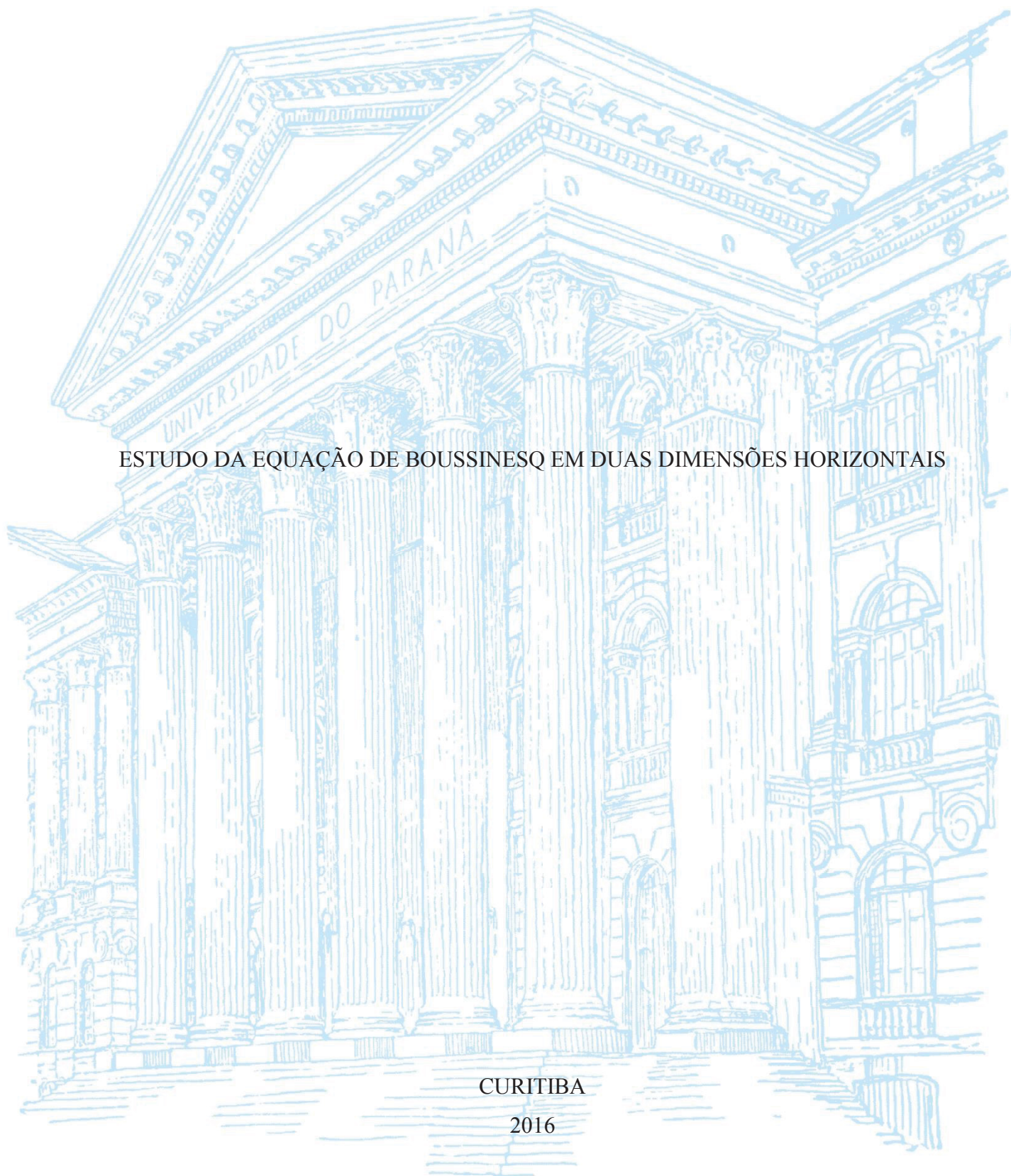
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ LUIZ TONSO FABIANI

ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES HORIZONTAIS

CURITIBA

2016



ANDRÉ LUIZ TONSO FABIANI

ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES HORIZONTAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. José Junji Ota

CURITIBA

2016

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

F118e

Fabiani, André Luiz Tonso

Estudo da equação de Boussinesq em duas dimensões horizontais /
André Luiz Tonso Fabiani. – Curitiba, 2016.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, 2016.

Orientador: José Junji Ota .

1. Escoamento. 2. Barragens de terra. 3. Boussinesq, Equação de. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Ota, José Junji. III. Título.

CDD: 627.883

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA DE RECURSOS HÍDRICOS E
AMBIENTAL
Código CAPES: 40001016021P0

TERMO DE APROVAÇÃO


Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE RECURSOS HÍDRICOS E AMBIENTAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **ANDRE LUIZ TONSO FABIANI**, intitulada: " **ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES HORIZONTAIS** ", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO**.

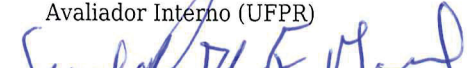
Curitiba, 23 de Setembro de 2016.



JOSE JUNJI OTA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


MARCELO RODRIGUES BESSA
Avaliador Interno (UFPR)


TOBIAS BERNWARD BLENINGER
Avaliador Interno (UFPR)


GERALDO DE FREITAS MACIEL
Avaliador Externo (UNESP/IS)


EDUARDO ENEAS DE FIGUEIREDO
Avaliador Externo (UFCEG)

Dedico este trabalho à minha esposa Eliana e
às minhas filhas Camila e Beatriz

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com muito sacrifício pessoal. Mas durante a sua elaboração muitas pessoas buscaram contribuir de diversas maneiras. A elas agradeço.

Agradeço:

- Ao amigo e orientador, prof. Dr. José Junji Ota, pelas orientações técnicas e de vida transmitidas. Se não as segui integralmente, a culpa é minha;
- Aos membros da banca de exame de doutorado, pelas sugestões de melhoria indicadas;
- Aos colegas do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Universidade Federal do Paraná, pelo apoio e incentivo incondicional durante toda a elaboração deste trabalho;
- Ao mais que amigo, um irmão, Cristóvão Fernandes; sempre com palavras de incentivo e motivação;
- Ao prof. Dr. Eloy Kaviski, pelas suas aparentes conversas, que na verdade foram orientações técnicas preciosas;
- À minha família e amigos, por entenderem a minha ausência em muitos momentos nesses longos anos;
- A Eliana, Camila e Beatriz, família querida que entendeu a importância deste trabalho para mim, sempre me incentivando a concluí-lo;
- Aos meus pais, Reynaldo e Nicla – *in memoriam* – e aos meus sogros, Johannes – *in memoriam* – e Floriana, pelos preciosos ensinamentos de vida passados e nunca esquecidos.

Quero manifestar o meu agradecimento especial ao prof. Dirk Schwanenberg, de Aachen, Alemanha, pela sessão do código-fonte de seu programa computacional desenvolvido durante o seu doutoramento – o DGFLOW – que permitiu a inclusão de alterações para a realização desta pesquisa.

"Non nobis Domine, non nobis, sed nomini tuo ad gloriam"

(Não a nós, Senhor, não a nós, mas pela Glória de teu nome)
Salm. 115:1 e lema templário

RESUMO

Esta pesquisa busca investigar o eventual benefício propiciado pela consideração da não hidrostaticidade da distribuição de pressões em escoamentos fluidos. Para tanto propõe-se as equações de Boussinesq deduzidas neste trabalho em sistema de coordenadas cartesianas para duas dimensões espaciais, para aplicação a escoamentos clássicos. Para a solução numérica foram utilizados os métodos de Galerkin Descontínuo e de Runge-Kutta, respectivamente para a discretização no espaço e no tempo. Para o desenvolvimento da presente tese é apresentada uma revisão dos temas matemáticos e computacionais necessários. Foram aplicadas as Equações de Boussinesq a escoamentos bidimensionais de ruptura de uma barragem cilíndrica com duas condições de fluxo e a um escoamento supercrítico em uma contração, onde ocorre a formação de ondas de choque. Os termos de correção da não hidrostaticidade foram calculados a partir de derivadas espaciais e temporais das componentes do vetor velocidade. Foi adotada a Série de Fourier para permitir a determinação de uma superfície espacial interpolando os valores de velocidades, a partir da qual foram determinadas as derivadas. Os resultados obtidos com a consideração da não hidrostaticidade – Equações de Boussinesq – apresentam resultados similares aos obtidos com a adoção das Equações de Águas Rasas, porém com um esforço computacional maior.

Palavras-chave: escoamento bidimensional; escoamento não permanente em canal; rompimento de barragem; equações de Boussinesq; método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo.

ABSTRACT

This research investigates the possible benefit of considering the non-hydrostaticity of the pressure distribution in fluid flows. We propose the Boussinesq equations deduced in this work in Cartesian coordinate system for two spatial dimensions, applied to classical flows. For the numerical solution, the Galerkin Discontinuous and Runge-Kutta methods were used, respectively for the discretization in space and time. A review of the necessary mathematical and computational themes is presented. The Boussinesq equations were applied to two-dimensional rupture flows of a cylindrical dam with two downstream flow conditions and to a supercritical flow in a contraction, where shock waves occur. The non-hydrostatic correction terms were calculated from spatial and temporal derivatives of the velocity components. The Fourier Series was adopted to allow the determination of a spatial surface interpolating the velocity values, from which the derivatives were determined. The results obtained with the consideration of non-hydrostatic pressure distribution - Boussinesq equations - present similar results to those obtained with the adoption of Shallow Water Equations, but with a greater computational effort.

Keywords: 2D flow; unsteady flow in channel; dam break; Boussinesq equation; Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Barragem de Malpasset, recém-construída e logo após a ruptura - USDI (1976)	27
Figura 2.1 - Solução de Ritter para a remoção total de uma parede retangular; a retirada é: a) "gradual" ou b) "instantânea" (Henderson (1966), Mascarenhas (1990) e Fabiani (1995))	51
Figura 2.2- Perfil longitudinal para os tempos: $t=0$ (---) e $t>0$ (—) – Método de Stoker (Townson e Al-Sahili (1989) e Fabiani (1995))	52
Figura 2.3 - Discretização do domínio através de diferenças finitas (figura 3.2 de Ferziger e Perić (1999))	55
Figura 2.4 - Discretização do domínio através de diferenças finitas (figura 3.1 de Fortuna (2000))	56
Figura 2.5 - Pulso analítico e solução numérica com oscilações e dissipação (figura 5.2 de Maliska (1995))	57
Figura 2.6 - Relacionamento dos nós para cada esquema de interpolação no tempo (figura 3.5 de Maliska (1995))	65
Figura 2.7 - Visualização gráfica do método de Euler ou de Runge-Kutta de 1ª ordem (Valle (2012, p. 14))	67
Figura 2.8 - Visualização gráfica do método de Euler melhorado, ou de Runge-Kutta de 2ª ordem (Valle (2012, p. 14))	68
Figura 2.9 - Visualização gráfica comparativa dos métodos de Runge-Kutta de 1ª a 4ª ordem	70
Figura 2.10 – Condição inicial para o estudo do rompimento de uma barragem cilíndrica (Schwanenberg (2003, p. 111 e 112))	71
Figura 2.11 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica (Schwanenberg (2003, p. 112)) em 1ª e 2ª ordem de aproximação	72

Figura 2.12 – Resultados de Schwanenberg (2003) – pg. 113 – em 1ª e 2ª ordem de aproximação (RKDG0 e RKDG1, respectivamente), comparados com os resultados semi-analíticos de Toro (2001).....	72
Figura 2.13 – escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica –resultados obtidos por Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004)	73
Figura 2.14 – Contração em um canal com escoamento supercrítico - resultados de Ippen e Dawson (1951).....	74
Figura 2.15 – Contração em um canal com escoamento supercrítico - resultados de Berger e Stockstill (1995).....	74
Figura 2.16 – Contração em um canal com escoamento supercrítico – resultados de Schwanenberg (2003) com 4935 elementos	74
Figura 2.17 – Malha utilizada por Schwanenberg (2003) e neste estudo, com 4935 elementos	75
Figura 3.1 – Variáveis utilizadas na dedução das Equações de Boussinesq em duas dimensões.	77
Figura 3.2 – a) Discretização espacial contínua (esquerda); b) discretização espacial nodal descontínua (centro); c) Discretização descontínua modal (direita).....	85
Figura 3.3 – Elemento genérico (central), seus vizinhos e circunvizinhos utilizados para desenvolver as discretizações dos termos de correção de Boussinesq em duas dimensões.	89
Figura 3.4 – Arranjo geométrico hipotético identificando uma indeterminação para o Método dos Mínimos Quadrados	94
Figura 4.1 – Evolução do escoamento do instante inicial até 0,69 s	98
Figura 4.2 – escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo sem a consideração da correção de Boussinesq	99

Figura 4.3 – Condição de escoamento inicial e após 0,69 s no rompimento de uma barragem circular com nível de água a jusante baixo	100
Figura 4.4 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas	102
Figura 4.5 – Detalhe na região da frente de onda do escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas	103
Figura 4.6 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m)	104
Figura 4.7 – Seção transversal no entorno do eixo x ($y \sim 0$ m)	104
Figura 4.8 – Pontos adotados para elaboração das seções transversais	105
Figura 4.9 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos por Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004) em confronto com o resultado semi-analítico e com os resultados deste estudo – Águas Rasas e Boussinesq	107
Figura 4.10 – Diferenças observadas – percentualmente – entre os níveis de água considerando ou não a correção de Boussinesq, para nível inicial a jusante baixo	108
Figura 4.11 – Configuração do escoamento unidimensional no rompimento de uma barragem com nível de água alto a jusante – Pereira (1996)	109
Figura 4.12 – Condição de escoamento inicial e após 0,69 s no rompimento de uma barragem circular com nível de água a jusante alto	110
Figura 4.13 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica com nível de água alto a jusante – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas	112
Figura 4.14 – Detalhe na região da frente de onda do escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica com nível de água alto a jusante – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas ..	113

Figura 4.15 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m), para nível de água inicial alto a jusante	114
Figura 4.16 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m), para nível de água inicial alto a jusante	114
Figura 4.17 – Diferenças observadas – percentualmente – entre os níveis de água considerando ou não a correção de Boussinesq, para nível inicial a jusante alto	115
Figura 4.18 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_1	116
Figura 4.19 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_2	116
Figura 4.20 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_3	117
Figura 4.21 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_4	117
Figura 4.22 – Resultado da profundidade obtido com a correção completa de Boussinesq ..	118
Figura 4.23 – Visualização em perspectiva dos níveis de água do escoamento na contração	118
Figura 4.24 – Comparativo dos resultados com o escoamento supercrítico em uma contração	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – valores máximos e recomendados para o controle CFL em uma dimensão	84
Tabela 3.2 – valores máximos e recomendados para o controle CFL em duas dimensões	84
Tabela 4.3 – tempos de processamento em função da correção de boussinesq adotada (tempo simulado de 0,69 s) e correção média	101

LISTA DE ABREVIATURAS

1D –	Escoamento ou formulação unidimensional
2D –	Escoamento ou formulação bidimensional
3D –	Escoamento ou formulação tridimensional
BREACH –	Programa para cálculo da formação da brecha em barragens de terra e enrocamento
CADAM –	Concerted Action on Dambreak Modelling
CFD –	Computational Fluid Dynamics, ou Mecânica dos Fluidos Computacional
CFL –	Número de Courant-Friedrichs-Lewy (condição de estabilidade)
CD-ADAPCO –	Companhia proprietária do software STAR CCM+
DAMBRK –	Programa computacional para cálculo de ruptura de barragens (Dam Break), do NWS
EDF –	Electricité de France
EDP –	Equações diferenciais parciais
EUA –	Estados Unidos da América
HLL –	Esquema de aproximação de Harten, Lax e Leer
HEC-RAS –	Hydraulic Engineering Center – River Analysis System – programa de domínio livre de escoamento em canais
MEF –	Método dos Elementos Finitos
MUSCL –	Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws
NWS –	National Weather Service, dos Estados Unidos da América
OTAN –	Organização do Tratado do Atlântico Norte
PAE –	Plano de Ações Emergenciais
RKDG –	Método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo
SIMPLEC –	Consistent Pressure Implicit Momentum Explicit
SMPDBK –	Modelo computacional simplificado do DAMBRK
STAR-CD –	Programa comercial para CFD substituído pelo STAR CCM+
STAR-CCM+ –	Programa comercial para CFD que substituiu o STAR-CD
SPH –	Smoothed Particle Hydrodynamics
TELEMAC –	Nome do programa computacional de escoamento não-permanente desenvolvido pelo Laboratório de SOGREAH e pela EDF
TVD –	Total Variation Diminishing Scheme
USDI –	United States Department of Interior – Departamento do Interior dos Estados Unidos

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto convencional

A	– Área da seção transversal (m^2); coeficientes do método dos volumes finitos; matriz de coeficientes
a	– Parâmetro de não-linearidade no estudo de ondas (-)
B	– Largura da superfície livre da seção transversal (m); vetor de forças de corpo; termo de correção de Boussinesq
C	– Coeficiente numérico; número de Chézy adimensional
c	– Celeridade do escoamento (m/s)
D	– Profundidade hidráulica (m) – área dividida pela largura da superfície
D_{50}	– Diâmetro médio do material do fundo do rio (m)
f	– Vetor do termo fonte
F	– Componentes do vetor força de corpo nas direções x e y (F_x e F_y); vetor de funções nas equações de águas rasas
g	– Aceleração da gravidade (m/s^2), igual a $9,81 m/s^2$
G	– Vetor de funções nas equações de águas rasas
h	– Profundidade do escoamento (m); tamanho da malha; profundidade característica
\bar{h}	– Profundidade do centro de pressão (m)
k	– Coeficiente da forma do canal; número da iteração; ordem do método de Runge-Kutta
K	– Constantes no cálculo da incerteza
l	– Comprimento característico (m)
M	– Expoente da seção transversal; massa (kg)
n	– Coeficiente de rugosidade de Manning; número da iteração
N	– Número de elementos finitos no domínio
p	– Pressão (Pa)
P	– Elemento central (em foco) na técnica dos elementos finitos
q	– Fluxo (m^3/sm) direções x e y (q_x e q_y)
r	– Distância radial (m); vetor resposta
R	– Raio hidráulico (m); vetor resíduo
S	– Termo fonte
S_0	– Declividade do fundo (m/m)
S_f	– Declividade da linha de energia na direção analisada (m/m)
t	– Tempo (s); dimensão temporal (s)

T	– Tempo adimensional (-)
u	– Componente da velocidade na direção x (m/s)
u'	– Flutuação do vetor velocidade (m/s) em torno de u
U_r	– Número de Ursell (-)
v	– Componente da velocidade na direção y (m/s); vetor resposta aproximado
v'	– Flutuação do vetor velocidade (m/s) em torno de v
V	– Vetor velocidade resultante (m/s)
w	– Componente do vetor velocidade na direção z (m/s); celeridade da frente de onda (m/s)
x	– Coordenada espacial (m); vetor incógnita
y	– Coordenada espacial (m)
z	– Coordenada espacial (m); cota da posição

Alfabeto grego

α	– Coeficiente das funções de interpolação
β	– Coeficiente das funções de interpolação; coeficiente de Boussinesq (ou coeficiente corretor da Quantidade de Movimento)
ξ	– Amplitude de onda característica
λ	– Coeficiente do método das características;
ρ	– Densidade do fluido (kg/m ³); coeficiente de Boussinesq (em alguns artigos citados)
μ	– Viscosidade do fluido (Pa.s)
Λ	– Coeficiente de pressão (-)
Π	– Coeficiente de pressão no fundo do canal (-)
σ	– Parâmetro dissipativo no estudo de ondas (-)
τ	– Tensão de cisalhamento (Pa)
Φ	– Valor analítico exato da variável
ϕ	– Variável genérica
ϕ_∞	– Valor numérico convergido de uma variável; valor analítico estimado de uma variável
θ	– Declividade do fundo do canal (graus); fator de ponderação no tempo; função de interpolação no MEF
ψ	– Função peso no MEF
ν	– Viscosidade turbulenta (m ² /s)
Δt	– Passo de tempo (s)

- Δx – Intervalo de espaço na direção x (m)
- Δy – Intervalo de espaço na direção y (m)

Símbolos matemáticos

- $\bar{\phi}$ – Valor médio temporal da variável
- $\langle \phi \rangle$ – Valor médio espacial da variável
- $|\phi|$ – Módulo da variável
- $\nabla(\phi)$ – Gradiente da variável
- $\mathcal{O}(\phi)$ – Ordem da aproximação
- $\min(a;b)$ – Retorna o menor valor entre a e b fornecidos
- ∂t – Simplifica a notação de $\partial/\partial t$ (*variável*)
- ∂x – Simplifica a notação de $\partial/\partial x$ (*variável*)
- ∂y – Simplifica a notação de $\partial/\partial y$ (*variável*)

Superíndices

- h – Coeficientes da equação da continuidade (cálculo da profundidade)
- u – Coeficientes da equação da quantidade de movimento linear (cálculo da velocidade)
- θ – Valor interpolado da variável no tempo
- 0 – Valor da variável no tempo anterior (conhecido)

Subíndices

- 0 – Indica variável a jusante da barragem
- 1 – Indica variável a montante da barragem; valor da variável no 1º ponto de integração de Gauss
- 2 – Indica variável na região parabólica do escoamento; valor da variável no 2º ponto de integração de Gauss
- 3 – Indica variável no choque gerado a jusante; valor da variável no 3º ponto de integração de Gauss
- 4 – Indica variável a jusante da barragem

L	– Ponto a jusante, à esquerda do ponto para interpolação no método das características
R	– Ponto a jusante, à direita do ponto para interpolação no método das características
M	– Ponto a montante, para interpolação no método das características
S_1	– Posição do choque pelo lado de montante
S_2	– Posição do choque pelo lado de jusante
a	– Ponto anterior para interpolação no método das características
p	– Ponto posterior para interpolação no método das características
h	– Valor aproximado da variável
b	– Valor da variável no fundo
s	– Valor da variável na superfície livre
m	– Valor da variável na posição de montante
j	– Valor da variável na posição de jusante

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	25
<i>1.1. JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DO TEMA.....</i>	<i>25</i>
<i>1.2. BREVE DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO ATUAL NA ÁREA DE PESQUISA.....</i>	<i>28</i>
<i>1.3. OBJETIVO</i>	<i>31</i>
<i>1.4. DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS.....</i>	<i>32</i>
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
<i>2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....</i>	<i>33</i>
<i>2.2. ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM CANAIS</i>	<i>33</i>
<i>2.2.1. Equações de Navier-Stokes.....</i>	<i>34</i>
<i>2.2.2. Simplificação para duas dimensões – Equações de Águas Rasas</i>	<i>36</i>
<i>2.2.3. Simplificação para uma dimensão – equação de Saint-Venant</i>	<i>37</i>
<i>2.2.4. Equações de Boussinesq em uma dimensão</i>	<i>38</i>
<i>2.3. ANÁLISE DA ORDEM DAS APROXIMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE</i>	<i>39</i>
<i>2.4. ESTUDOS SOBRE RUPTURA DE BARRAGENS</i>	<i>41</i>
<i>2.4.1. PRIMEIROS ESTUDOS</i>	<i>41</i>
<i>2.4.2. ESTUDOS COM MODELOS MATEMÁTICOS.....</i>	<i>42</i>
<i>2.4.3. ESTUDOS NO BRASIL.....</i>	<i>44</i>
<i>2.4.4. OUTROS ESTUDOS PERTINENTES</i>	<i>46</i>
<i>2.5. ASPECTOS TEÓRICOS-MATEMÁTICOS SOBRE ONDA DE RUPTURA</i>	<i>49</i>
<i>2.5.1. Soluções para o perfil da onda para leito seco a jusante – método de Ritter.....</i>	<i>50</i>

2.5.2.	Soluções para o perfil da onda para leito submerso a jusante – método de Stoker	51
2.5.3.	Softwares comerciais ou de domínio público	53
2.5.4.	Análise de ondas de choque sob pontos de vista euleriano e lagrangeano	53
2.6.	<i>MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIDRÁULICOS</i>	54
2.6.1.	Método das Características	54
2.6.2.	Método das Diferenças Finitas	54
2.6.3.	Método dos Volumes Finitos	56
2.6.4.	Método dos Elementos Finitos	58
2.6.5.	Método de Galerkin Descontínuo	61
2.7.	<i>MÉTODOS QUE CONSIDERAM A VARIAÇÃO NO TEMPO</i>	64
2.7.1.	Método de Runge-Kutta de 1ª ordem, ou Método de Euler	66
2.7.2.	Método de Runge-Kutta de 2ª ordem, ou Método de Euler Melhorado	67
2.7.3.	Método de Runge-Kutta de 3ª ordem	69
2.7.4.	Método de Runge-Kutta de 4ª ordem	69
2.8.	<i>CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO (ENTRADAS, SAÍDAS, CONTORNOS “RÍGIDOS”)</i>	70
2.9.	<i>CASOS A SEREM ANALISADOS</i>	71
2.9.1.	Generalidades	71
2.9.2.	Rompimento de barragem cilíndrica com nível de água a jusante baixo	71
2.9.3.	Rompimento de barragem cilíndrica com nível de água a jusante alto	73
2.9.4.	Contração em um escoamento supercrítico	73

CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS	76
3.1. <i>GENERALIDADES.....</i>	76
3.2. <i>DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES</i>	76
3.2.1. Equação da Continuidade	77
3.2.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção z	78
3.2.3. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção x.....	79
3.2.4. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção y	81
3.2.5. Forma final das equações de Boussinesq em duas dimensões horizontais.....	81
3.3. <i>APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO E RUNGE-KUTTA ÀS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS.....</i>	82
3.4. <i>ADAPTAÇÃO DO MÉTODO PARA LEVAR EM CONTA A HIPÓTESE DE BOUSSINESQ.....</i>	86
3.4.1. Discretização dos termos de correção de Boussinesq em duas dimensões	87
3.4.2. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para determinação dos coeficientes de discretização das equações de correção de Boussinesq.....	91
3.4.3. Alteração da Função de Aproximação do Método dos Mínimos Quadrados	93
3.4.4. Verificação da estabilidade do método proposto às correções aos termos fonte	96
CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ.....	97
4.1. <i>GENERALIDADES.....</i>	97
4.2. <i>ROMPIMENTO DE BARRAGEM CILÍNDRICA.....</i>	98
4.3. <i>ROMPIMENTO DE UMA BARRAGEM CILÍNDRICA COM NÍVEL DE JUSANTE ALTO.....</i>	109
4.4. <i>CONTRAÇÃO EM UM ESCOAMENTO SUPERCRÍTICO.....</i>	116
CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS	121

5.1.	<i>GENERALIDADES.....</i>	<i>121</i>
5.2.	<i>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</i>	<i>121</i>
5.3.	<i>RECOMENDAÇÕES PARA CONTINUIDADE DO ESTUDO.....</i>	<i>123</i>
	REFERÊNCIAS	125
	APÊNDICE I – DEDUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO EM	
	CANAIS	130
	<i>I – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT E DE ÁGUAS RASAS.....</i>	<i>130</i>
	<i>II – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ EM UMA DIMENSÃO.....</i>	<i>139</i>
	<i>III – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES</i>	<i>145</i>

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1. JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DO TEMA

A Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD, na sigla em inglês de '*Computational Fluid Dynamics*') tem avançado muito em função da grande evolução da informática, seja nos microcomputadores seja nos *clusters* para processamento de alto desempenho. Logo, a utilização das equações completas de Navier-Stokes está cada vez mais acessível em termos de programas comerciais ou mesmo em códigos livres. Casos pontuais de engenharia podem ser resolvidos por este caminho. No entanto, para casos em que o escoamento ocorre em uma grande área – por exemplo, rios e reservatórios – a discretização espacial e temporal dos fenômenos, na escala dos programas em 3D, torna a análise muito dispendiosa, seja em custo de software, de máquina ou mesmo no tempo de processamento. Tal abordagem somente é possível em escoamentos sem descontinuidades importantes, onde é possível utilizar uma malha de discretização espacial maior, com passos de tempo também maiores. Para escoamentos com descontinuidades, sejam ondas – com rompimento de barragem – ou mesmo fortes acelerações localizadas, a malha a ser adotada deve ser muito refinada, o que acaba conduzindo, por consequência, a menores passos de tempo.

Assim, muitas análises no âmbito das Engenharias Civil e Ambiental são realizadas com modelos que se utilizam de simplificações, principalmente com a redução do número de dimensões espaciais relevantes para o estudo. A não permanência, quando presente no problema (caso de problemas transientes), não pode nunca ser abandonada.

A simplificação para uma dimensão espacial é muito comum e realizada há muito tempo pois possibilita a análise de problemas reais de forma rápida. Com a melhoria dos métodos e equipamentos computacionais a análise em duas dimensões já está difundida. Da mesma forma, a modelagem em três dimensões espaciais também tem evoluído muito.

Este estudo busca analisar a necessidade, ou mesmo a viabilidade, da consideração de que a distribuição de pressões no corpo fluido não é obrigatoriamente hidrostática, ou seja, existem variações de velocidades verticais que causam aceleração e, portanto, forças verticais no escoamento. Estas forças causam variação do perfil de pressões no corpo fluido, alterando a característica hidrostática da distribuição de pressões. Esta análise, realizada em modelos em uma ou duas dimensões, pode ser importante em função do caso em estudo.

Pode-se ver em Roger *et al.* (2009) e Roger *et al.* (2010) que foram observadas diferenças entre os resultados obtidos em experiências (laboratoriais) com simulações matemáticas em 3D e em 2D, com erros maiores nesta, como esperado. Essas diferenças, segundo os autores, podem ser creditadas às distribuições de velocidades e de pressões diferentes das usualmente assumidas nas hipóteses preliminares das deduções das equações (velocidade constante e pressão com variação linear). Em modelos 3D essas considerações não são relevantes, mas sim a adoção de um modelo apropriado de turbulência (e seus respectivos parâmetros) que seja capaz de reproduzir o fenômeno em análise. Esses trabalhos apresentam a necessidade de estudos de distribuições de pressões diferentes da hidrostática na busca de resultados com maior aderência aos obtidos experimentalmente.

A simplificação inicial de praticamente todas as formulações, tanto em 1D como em 2D, é assumir que a distribuição de pressões na vertical é hidrostática. Isto implica em que as linhas de corrente sejam retilíneas e paralelas – ou seja, não existem velocidades na direção em que foi feita a simplificação, a vertical. Muito embora isso não seja correto em várias análises, esta simplificação conduz a resultados muito próximos da realidade na grande maioria dos casos, e tem sido utilizada há muito tempo em todo o mundo.

Com o intuito de entender melhor os fenômenos físicos envolvidos e melhorar a precisão dos resultados, este trabalho busca identificar qual a melhoria nos resultados a partir da troca da distribuição hidrostática de pressões por uma não-hidrostática. A formulação é chamada de Equação de Boussinesq e assume que existe uma velocidade vertical variável de máxima na superfície livre e nula no fundo (condição de impenetrabilidade). Esta variação da velocidade causa uma aceleração e, a partir dela, uma força, que causa variação na Quantidade de Movimento do escoamento.

Com esta hipótese assumida, foram desenvolvidos modelos computacionais capazes de corrigir os cálculos pelos métodos tradicionalmente utilizados – Saint-Venant ou Águas Rasas – comparando os resultados obtidos e o esforço computacional adicional necessário para atingir tal precisão.

Um escoamento com características extremas de variações de velocidades e de profundidade é o causado pelo rompimento de uma barragem. Este é um acidente infelizmente comum, e podemos citar como exemplos o rompimento das barragens de Euclides da Cunha (1977 – Brasil), Teton (1976 – EUA) e Malpasset (1959 – França) – esta barragem com fotografias mostradas na Figura 1.1 – USDI (1976).

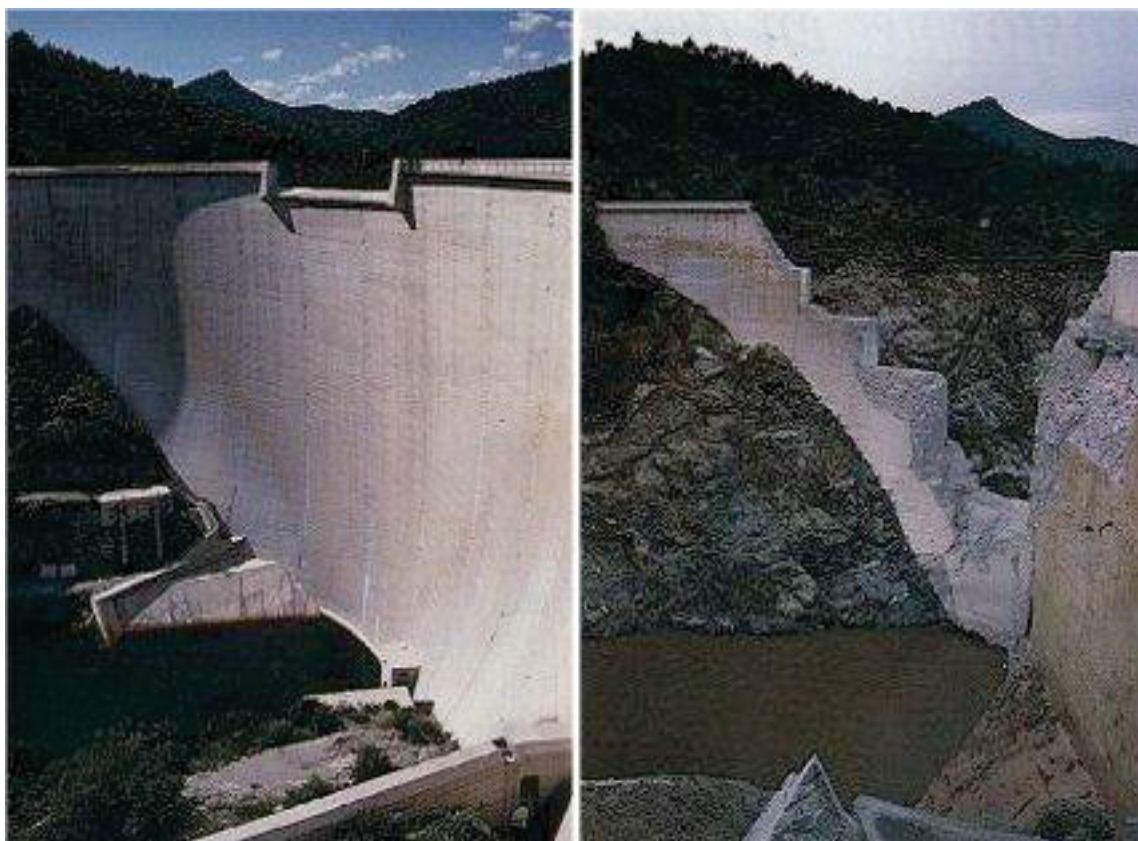


Figura 1.1 - Barragem de Malpasset, recém-construída e logo após a ruptura - USDI (1976)

O fenômeno em análise é complexo, com características de escoamento tridimensional e rapidamente variado no tempo. A complexidade dos modelos em três dimensões dificulta em muito, até o presente momento, o desenvolvimento de modelos 3D para análise de ruptura de barragens em casos reais. Observa-se, ainda, que os grandes gradientes que se apresentam necessitam de uma discretização espacial e temporal muito refinada, o que aumenta em muito o custo computacional da análise, assim como o tempo para obtenção dos resultados. Os modelos comerciais existentes, e que permitem tratar tal fenômeno, são normalmente simplificados para escoamento em uma dimensão. Os modelos mais modernos – ainda acadêmicos – levam em conta duas dimensões, mas são de divulgação e utilização restritas aos pesquisadores que os desenvolveram. A utilização das equações de Boussinesq, da forma proposta para este estudo abre uma nova perspectiva, pois a sua aplicação à hidráulica fluvial não foi encontrada na revisão bibliográfica. Ela tem registros apenas em modelagens em uma dimensão; para estudos de ondas oceânicas, existem modelos em duas dimensões, mas sem a consideração da perda de carga (ou seja, da rugosidade) e da declividade do fundo –

simplificação completamente aceitável no oceano profundo, mas muito grosseira no caso de um rio.

O estudo da propagação de ondas de ruptura de barragens em canais de rios serve ainda de base para a elaboração do Plano de Ações Emergenciais (PAE), preparado pela proprietária e/ou concessionária da barragem em conjunto com a Defesa Civil da região afetada.

Modelos computacionais que conseguem reproduzir o fenômeno da propagação de uma onda de ruptura de barragem podem analisar as ondas de enchentes naturais ou mesmo operações muito rápidas de comportas, tendo em vista que estas não possuem diferenças de níveis de água e de vazões tão grandes como as observadas no caso da ruptura de barragem. Os estudos atuais de ondas de rupturas são realizados, normalmente, por modelos em uma dimensão, utilizando a formulação de Saint-Venant, ideal para canais com águas rasas. Quando os fenômenos possuem fortes gradientes – como ondas de mar próximas da arrebentação ou nas ondas de rupturas de barragens – a consideração da formulação de Boussinesq pode ser interessante, uma vez que leva em conta uma distribuição não hidrostática de pressões na vertical (gerada por acelerações verticais). Em regiões onde ocorre forte curvatura do fluxo, o uso das equações de Saint-Venant pode levar a erros, o que pode ser corrigido pela adoção das equações de Boussinesq.

Segundo PEREIRA (1996), quando o nível de água a jusante de uma barragem antes da ruptura é alto, frente à altura a montante, a consideração de distribuição não hidrostática de pressões conduz a resultados mais realistas. Algumas barragens atuais, em projeto, em construção ou em operação, apresentam pequena altura de barramento e um nível de água elevado a jusante, o que justificaria o estudo do escoamento gerado na sua hipotética ruptura com a consideração das equações de Boussinesq.

1.2. BREVE DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO ATUAL NA ÁREA DE PESQUISA

Podemos analisar as pesquisas atualmente publicadas dividindo em dois grandes grupos:

- Equações utilizadas para a análise do escoamento em canais, bem como o número de dimensões relevantes ao problema; e
- Métodos matemáticos e computacionais utilizados para a sua solução.

Quanto às dimensões relevantes, encontramos trabalhos atuais em uma ou duas dimensões, utilizando as equações de Saint-Venant ou de Águas Rasas, conforme o caso. Existem algumas publicações sobre a aplicação direta das equações de Navier-Stokes, ainda que utilizando a formulação de Reynolds (valores médios no tempo e turbulência) para análise em três dimensões. As equações de Boussinesq são analisadas apenas em uma dimensão, sem estudos apresentados desta formulação em duas dimensões para canais, mas apenas para engenharia oceânica. Existe um método em três dimensões que tem sido aplicado em áreas pequenas, mas com bons resultados e em três dimensões; é o SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Esse método foi desenvolvido inicialmente para problemas de astrofísica¹. Uma referência recente nesta linha de pesquisa é Vasco (2014), que tratou, principalmente, de intrusão de massas sólidas em campo fluido, simulando deslizamentos de encostas em reservatórios. Embora os resultados tenham apresentado pequena concordância entre valores numéricos e experimentais, os fenômenos foram reproduzidos, o que indica que o método é passível de utilização, mas deve ser aprimorado, em termos de controle de erros e condições de contorno.

Quanto aos métodos de solução das equações diferenciais resultantes, os artigos mais antigos versavam sobre Método das Características ou das Diferenças Finitas. Atualmente, a maioria dos pesquisadores utiliza o método dos Volumes Finitos. O Método dos Elementos Finitos tem sido muito utilizado em hidráulica costeira, ou onde não existem fortes descontinuidades, pois o método tradicional não permitia uma boa representação desse tipo de fenômeno.

Há pouco mais de uma década, Cockburn e Shu (2001) apresentaram um método chamado de Galerkin Descontínuo, que permite capturar descontinuidades no campo de análise, associado ao Método de Runge-Kutta para a aproximação no tempo (chamado genericamente na literatura pela sigla RKDG). Schwanenberg (2003) aplicou em seu doutoramento esse método às equações de Saint-Venant e de Águas Rasas (1D e 2D) com bons resultados. O método original (método de Galerkin clássico) tinha problemas de continuidade e a

¹ O desenvolvimento inicial do método SPH foi apresentado nos trabalhos:

- R.A. Gingold and J.J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars", *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol. 181, pp. 375–89, 1977.
- L.B. Lucy, "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis," *Astron. J.*, Vol. 82, pp. 1013–1024, 1977.

Atualmente existem programas em código livre que podem ser acessados, por exemplo, em: https://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/Main_Page (acessado em 20/07/2016).

aproximação no tempo era convencional (diferenças finitas explícita ou implícita), o que conduzia a fortes instabilidades, não permitindo a sua aplicação aos casos estudados, com fortes gradientes.

Roger *et al.* (2009) e Roger *et al.* (2010) aplicaram esse método juntamente com outros (método dos volumes finitos e o STAR CD[®] – um software comercial em 3D, hoje denominado STAR CCM⁺²), ao caso de uma ruptura de dique. Levantaram a hipótese de que as diferenças de resultados ainda existentes entre os modelos 2D de Águas Rasas e os resultados experimentais – ou modelados em 3D – podem ser creditadas à distribuição não hidrostática de pressões e, ainda, à distribuição não uniforme de velocidades. Este trabalho busca analisar a influência da distribuição de pressões sobre os resultados, deixando o estudo da distribuição de velocidades para estudos futuros.

Motivação do Estudo

A consideração da distribuição hidrostática de pressões está no núcleo das equações de Saint-Venant (1D) e de Águas Rasas (2D), usadas há mais de um século para representar o escoamento em canais, rios e estuários de forma simplificada, permitindo o seu cálculo com as ferramentas existentes na época. Pequenas diferenças entre os valores reais obtidos e os calculados são aceitos ou são realizados ajustes nos coeficientes de rugosidade (em alguns métodos através da criação de uma viscosidade artificial). Isto pode ser observado, mesmo em movimentos chamados de potenciais, creditando todas as diferenças observadas à consideração de fluxo potencial, o que é totalmente equivocado, pois outros fatores influenciam os resultados.

A generalização de modelagem 3D com as equações de Navier-Stokes completas (levando em conta as tensões de Reynolds), pode-se observar as diferenças entre os resultados e tentar identificar a sua origem. Roger *et al.* (2009) e Roger *et al.* (2010) apresentam estudos de escoamento em uma ruptura de dique, analisado como movimento permanente, onde podemos observar variações entre os valores experimental e calculado de velocidades, profundidades e vazões. Para esse caso apresentado a modelagem 3D completa ainda apresenta um erro de cerca de 3% em relação aos resultados experimentais de vazão, enquanto que na modelagem 2D este erro médio fica em torno de 8% para esse tipo de escoamento.

² Informações sobre esse programa comercial pode ser acessado em: <http://www.cd-adapco.com/products/star-ccm%C2%AE> (acessado em 20/07/2016)

Em Roger *et al.* (2009) observa-se a seguinte citação:

“Additionally, a non-hydrostatic pressure distribution depending on the free surface curvature should be adopted. Depth-averaging and above all the hydrostatic pressure assumption are reasons for the observed differences between the experimental and numerical investigations of dike-break induced flows”.

Em outro artigo, Roger *et al.* (2010), lê-se:

“...demonstrate that non-uniform velocity profiles as well as non-hydrostatic conditions near the breach in the channel are most probably the main reasons for this underestimation. Additional simulations introducing a reliable spatial distribution of Boussinesq and pressure coefficient may clarify their respective impact”.

Tais citações demonstram a necessidade de estudos referentes à distribuição de pressões e, também, da distribuição de velocidades.

1.3. OBJETIVO

O objetivo central desta tese é deduzir as equações de Boussinesq em duas dimensões espaciais com termo de correção de não hidrostaticidade, para analisar escoamentos em canais ou planícies bidimensionais, quantificando a melhoria nos resultados e o custo computacional relativo dispendido nessa melhoria, em relação à utilização das Equações de Águas Rasas (2D).

Como objetivos específicos e que permitirão atingir o objetivo central temos:

- Dedução das equações de Boussinesq, levando em conta a distribuição não hidrostática de pressões em duas dimensões horizontais, em sistema cartesiano de coordenadas, considerando a declividade e rugosidade do fundo;
- Análise da adoção da distribuição de pressões hidrostática ou não-hidrostática na vertical, isto é, analisar a necessidade ou não de utilizar as equações de Boussinesq no lugar das equações de Águas Rasas;
- Discretização das derivadas espaciais e temporais, necessárias para a representação dos termos de correção; e

- Avaliação da aplicabilidade dos métodos de Galerkin Descontínuo com Runge-Kutta para a equação de Boussinesq.

Deve-se lembrar que o objetivo principal desta pesquisa é aumentar a aderência de um modelo 2D aos resultados reais, tornando a análise mais rápida e com menos esforço computacional que o necessário para a modelagem 3D, mas com mais precisão do que os obtidos com modelos 1D ou 2D com distribuição hidrostática de pressões.

1.4. DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, divididos como descrito a seguir:

- No CAPÍTULO 1 são apresentadas as justificativas para o estudo proposto, a relevância do tema e os objetivos – geral e específicos;
- O CAPÍTULO 2 apresenta a revisão bibliográfica dos pontos teóricos necessários para a realização da pesquisa, tanto em termos físicos, como matemáticos. Os casos a serem analisados são também apresentados, com os resultados obtidos em estudos realizados por outros pesquisadores;
- A dedução das equações propostas é apresentada no CAPÍTULO 3, onde também são apresentadas as discretizações adotadas para os termos adicionais criados na dedução;
- No CAPÍTULO 4 a formulação proposta é aplicada a três casos – dois rompimentos de barragens e uma transição em largura em um canal com escoamento torrencial – buscando quantificar as variações nos resultados obtidos;
- No CAPÍTULO 5 são apresentadas as conclusões deste estudo e recomendações para a continuidade das pesquisas.

Complementarmente, o APÊNDICE 1 apresenta a dedução detalhada das equações de Boussinesq, apresentada de maneira abreviada no corpo do texto, no CAPÍTULO 3.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica sobre os temas abrangidos por esta tese, bem como alguns temas auxiliares necessários à compreensão dos pontos principais. São eles:

- Equação do movimento:
 - Equação de Navier-Stokes;
 - Equação de Águas Rasas 2D;
 - Equação de Saint-Venant, ou equação de águas rasas 1D;
 - Equações de Boussinesq 1D;
- Rompimento de Barragem;
- Métodos Numéricos para Solução das Equações;
- Método de Galerkin Descontínuo;
- Método de Runge-Kutta.

Estes tópicos serão tratados individualmente na sequência.

2.2. ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM CANAIS

Neste item são apresentadas as formulações matemáticas para o equacionamento do escoamento não-permanente de fluido incompressível em canais abertos. Fluido incompressível é uma simplificação de cálculo muito utilizada. Ela é válida para fluidos com coeficiente de elasticidade alto e em escoamentos com velocidades baixas quando comparadas com a velocidade das ondas elásticas no meio (ou velocidade do som no meio). Para escoamentos em canais abertos esta hipótese é perfeitamente aplicável. O equacionamento do problema parte das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento linear. A equação da conservação da energia pode ser desconsiderada no caso do estudo de fluidos incompressíveis; em muitos casos, esta equação resulta idêntica à da conservação da Quantidade de Movimento Linear. Não serão analisados neste trabalho a difusão ou convecção de substâncias no meio líquido.

2.2.1. Equações de Navier-Stokes

Os movimentos dos fluidos são representados matematicamente pelas equações de Navier-Stokes. Elas expressam a conservação da quantidade de movimento linear nas três direções espaciais. É usual agregar-se a elas a equação da continuidade (ou da conservação da massa), mantendo-se a nomenclatura. Uma dedução dessas equações pode ser encontrada, por exemplo, em Schlichting (1979) ou Fortuna (2000). A sua forma geral, tridimensional e para qualquer sistema de coordenadas, pode ser assim escrita:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\rho \vec{V}) \right] = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

Onde:

ρ : massa específica do fluido (kg/m³);

μ : viscosidade dinâmica do fluido (Pa.s);

\vec{V} : vetor velocidade (m/s);

p : pressão no ponto (Pa);

\vec{F} : força de massa, ou aceleração (m/s²).

A equação (2.1) representa a conservação da massa, enquanto a equação (2.2) vetorial (conjunto de três equações) representa a conservação da quantidade de movimento linear nas três direções espaciais.

Em coordenadas cartesianas, e considerando apenas as duas dimensões horizontais, as equações podem ser escritas da seguinte forma (equações (2.3) a (2.5)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Onde F_x e F_y são as componentes do vetor \vec{F} ; u e v (m/s) são as componentes do vetor velocidade \vec{V} ; τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yx} e τ_{yy} são as tensões cisalhantes no fluido (Pa). As tensões cisalhantes em um fluido newtoniano, incompressível e isotrópico (caso da água) podem ser calculadas pelas equações (2.6) a (2.8):

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.7)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

Os valores das grandezas nessas equações são instantâneos, o que torna o conjunto de equações de aplicação direta apenas para escoamentos laminares. Uma forma prática de utilizar estas relações para escoamentos turbulentos – mais comuns na prática – é dividir as incógnitas na soma de um valor médio e de uma flutuação turbulenta ao redor do valor médio, com média nula. Utilizando esta hipótese, e realizando as médias em um intervalo de tempo suficientemente curto – para podermos analisar a variação no tempo das grandezas – mas suficientemente longo – que permita obter uma flutuação com média nula – teremos a forma de Reynolds para as equações de Navier-Stokes, reproduzidas nas equações (2.9) e (2.10) em substituição às equações (2.4) e (2.5) – a equação (2.3) continua válida, mas escrita em termos de velocidades médias:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

Onde \bar{u} , \bar{v} e \bar{p} são valores médios temporais e u' e v' representam as flutuações turbulentas. Estas equações já se encontram simplificadas para o caso de escoamento em duas dimensões.

Para resolver estas equações, às quais incluímos duas novas variáveis (as flutuações turbulentas), necessitamos de equações de fechamento, conhecidas como modelo de

turbulência. Este procedimento não será adotado neste trabalho, tendo em vista as análises que deverão ser realizadas em termos da consideração da forma da distribuição de pressões.

A seguir são apresentadas, de forma geral, as equações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

2.2.2. Simplificação para duas dimensões – Equações de Águas Rasas

As equações de Navier-Stokes, acima apresentadas, representam o escoamento laminar em três ou duas dimensões (equações (2.1) a (2.5)). A consideração de escoamento turbulento conduz à forma de Reynolds para as equações de Navier-Stokes (equações (2.9) e (2.10)). O escoamento que ocorre após a ruptura de uma barragem, ou mesmo escoamento normal em rios, é claramente turbulento e, normalmente, o escoamento pode ser simplificado para duas dimensões, supondo que a altura da barragem é muito inferior às duas dimensões horizontais do problema. Neste caso, podemos utilizar uma simplificação chamada de Equações de Águas Rasas, onde as equações representam a conservação da massa e da quantidade de movimento linear nas duas direções horizontais, \underline{x} e \underline{y} . Uma das formas deste conjunto de equações é representada nas equações (2.11) a (2.13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy}) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Onde:

S_{0x} e S_{0y} - declividades do fundo nas direções \underline{x} e \underline{y} , que representam a componente da força de massa em cada direção (m/m);

S_{fx} e S_{fy} - declividades da “superfície” de energia nas direções \underline{x} e \underline{y} (m/m), calculadas, por exemplo, pela equação de Manning, como mostrado nas equações (2.14) e (2.15) (ver Apêndice I, equações (A.108) a (A.111)):

$$\begin{cases} S_{fx} = \frac{|V|un^2}{h^{4/3}} \\ S_{fy} = \frac{|V|vn^2}{h^{4/3}} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

$V = \sqrt{u^2 + v^2}$ - vetor velocidade total (m/s);

n : coeficiente de rugosidade da fórmula de Manning ($m^{-1/3}s$).

O valor do coeficiente de Manning é, muito provavelmente, um caso único na ciência moderna, pois o seu valor numérico é o mesmo em unidades do SI ($m^{-1/3}s$) ou em unidades inglesas (que deveriam ser $ft^{-1/3}s$). Neste caso, a fórmula de Manning apresenta uma constante multiplicadora na formulação em unidades inglesas – igual a 1,4859, ou $(0,3048^{-1/3})$ – que faz a correção das unidades utilizadas nas outras grandezas envolvidas. A equação de Manning é uma equação empírica de resistência do escoamento, muito utilizada na prática para escoamentos em rios e condutos. Como a maioria das equações empíricas, ela leva em conta a rugosidade do contorno e o raio hidráulico da seção, considerando que o fluido que está escoando seja água. Levando em conta apenas a rugosidade do contorno, o valor de n pode ser calculado pela relação de Strickler, de 1923 (equação (2.16)):

$$n = \frac{D_{50}^{1/6}}{25} \quad (2.16)$$

Com D_{50} representando o diâmetro médio (m) dos grãos de areia do contorno.

2.2.3. Simplificação para uma dimensão – equação de Saint-Venant

Nos casos em que uma das dimensões predomina sobre as demais (caso de rios, ou onde as seções transversais são praticamente constantes), podemos simplificar ainda mais a formulação, desprezando-se uma das direções (normalmente a direção y), e mantendo-se apenas a direção principal (normalmente a x). Com isto, o conjunto de equações resultante, apresentado nas equações (2.17) e (2.18) para canais retangulares de grande largura (e em uma das formas não-conservativas possíveis), recebe o nome de Equações de Saint-Venant:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (2.18)$$

Onde: h é a profundidade do escoamento (m); u a sua velocidade média (m/s); g a aceleração da gravidade (m/s^2); S_0 a declividade do fundo (m/m) e S_f a declividade da linha de energia – ou a perda de carga unitária (m/m), calculada pela equação (2.14), onde $V = u$.

As equações acima estão escritas na forma não-conservativa, ou seja, a formulação matemática discretizada não obriga a conservação da massa nas pequenas porções do domínio, muito embora respeitem a equação da conservação da massa. É um problema matemático e não físico. O grau de significância da não conservação da massa está intimamente ligado ao modelo numérico adotado, à discretização espacial e temporal e ao esquema de solução adotados. Operações matemáticas simples (adição da equação da conservação da massa à da quantidade de movimento – equações (2.17) e (2.18) e simplificações resultantes) podem, no entanto, transformar estas equações em sua forma conservativa, onde as quantidades parciais são localmente preservadas. Estas equações na forma conservativa são escritas como nas equações (2.19) e (2.20) abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

2.2.4. Equações de Boussinesq em uma dimensão

Uma simplificação importante adotada nas equações de Saint-Venant, e também nas Equações de Águas Rasas, é que a distribuição de pressões na vertical é hidrostática, isto é, a pressão varia apenas com a profundidade, e de forma linear. Isto implica em que não haja velocidade na direção vertical (pois as linhas de corrente devem ser retilíneas e paralelas), o que não é uma simplificação válida para todos os escoamentos, principalmente nos sujeitos a fortes gradientes ou grandes descontinuidades. Boussinesq (segundo Chaudhry (2008)) propõe alterar as equações de Saint-Venant para levar em conta uma distribuição não-hidrostática de pressões. As equações podem ser escritas como em (2.21) e (2.22).

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \right. \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + g \frac{h^2}{2} - \underbrace{\frac{h^3}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\text{Correção de Boussinesq}} \right\} = gh(S_0 - S_f) \right\} \quad (2.22)$$

Onde se observa que o terceiro termo da segunda derivada da equação (2.22) (conservação da quantidade de movimento na direção x) é uma correção em função da alteração da distribuição de pressão hidrostática usual – representado pelo segundo termo da mesma derivada. As equações mantêm a forma conservativa (comparar as equações (2.21) e (2.22) com as equações (2.19) e (2.20), o que é bom em termos dos resultados numéricos, tendo em vista que esta formulação representa de modo matematicamente mais correto a conservação da massa no domínio de estudo.

2.3. ANÁLISE DA ORDEM DAS APROXIMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE

Nascimento (2001), citando Seabra Santos (1989a, 1989b), apresenta uma análise das equações chamadas de “classe Boussinesq”, que são equações que levam em conta acelerações verticais do escoamento. A equação apresentada é unidimensional, mas as suas considerações são válidas para duas dimensões. Este modelo proposto – “classe Boussinesq” – apresenta derivadas de ordem superior, e admite velocidade horizontal uniforme na profundidade, enquanto a velocidade vertical varia linearmente entre o valor máximo na superfície até nula no fundo. Esta análise parte das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, utilizando-se de parâmetros adimensionais físicos $\sigma = h/l$ e $a = \xi/h$ – onde temos h representando uma profundidade característica, l um comprimento característico e ξ a sobrelevação em relação ao nível de água em repouso (todos em metros). Na hipótese de águas rasas temos $h/l \ll 1$ (muitos autores colocam como limite máximo $h/l = 0,05$). O parâmetro σ^2 representa os efeitos dispersivos, enquanto ϵ representa os efeitos não-lineares. A relação entre estes parâmetros conduz ao número de Ursell, que apresenta a forma mostrada na equação (2.23):

$$U_r = \frac{a}{\sigma^2} = \frac{\xi l^2}{h^3} \quad (2.23)$$

Assim, se $U_r < 1$ temos que $a < \sigma^2$, ou seja, os efeitos dispersivos predominam sobre os não-lineares. Já quando $U_r > 1$, temos que $a > \sigma^2$, ou seja, os efeitos não-lineares predominam sobre os dispersivos. Analisando-se as combinações dos efeitos descritos, podemos ter modelos com as seguintes características – para escoamentos em uma dimensão:

- a. Aproximação linear não-dispersiva (LND) – equações em primeira aproximação, independentemente do valor de U_r ;
- b. Aproximação não-linear não-dispersiva (NLND) – ainda em primeira aproximação, obtém-se as equações de Saint-Venant (ver item 2.2.3), que conduzem às equações de Airy, no caso de ondas em uma dimensão e pequena amplitude. Neste caso, temos $U_r > 1$, pois predominam efeitos não-lineares.
- c. Aproximação linear dispersiva (LD) – é uma equação em segunda aproximação, considerando $\epsilon \ll \sigma^2$, e onde predominam efeitos dispersivos ($U_r < 1$).
- d. Aproximação não-linear dispersiva (NLD) – ainda em segunda aproximação e escoamento unidirecional, obtém-se as equações de Serre (ou Sistema Serre). No caso de fundo variável no espaço, as equações são chamadas de Equações de Boussinesq e, no caso em que as ondas se propagarem em apenas um sentido, as equações recebem o nome de Korteweg-de Vries. No caso de escoamentos em duas dimensões, com fundo variável no espaço e no tempo, as equações resultantes são denominadas de Green e Naghdi e, se a amplitude das ondas for pequena, estas equações reduzem-se às equações de Wu.

Mais detalhes podem ser obtidos em Nascimento (2001).

Com este ponto de vista, da mecânica da propagação de ondas, o modelo estudado nesta tese se assemelha mais a um modelo de Serre que de Boussinesq puro, pois neste caso, apenas a derivada cruzada da equação de correção (equação (2.22)) é utilizada, e não os três termos de forma conjunta.

Tossou (2009) fez um trabalho de desenvolvimento de um equacionamento de ondas de Serre em 2DH, utilizando o software MATLAB[®] e a formulação de Elementos Finitos de Taylor Galerkin, um método clássico. Aplicou a escoamentos fluviais sem choque e, ainda, a casos de rompimento de barragens. Os seus resultados mostraram uma aproximação aos resultados obtidos pela formulação de Saint-Venant clássico (com distribuição hidrostática de

pressões na vertical). Apresentou, ainda, uma formulação mais abrangente – com incremento da difusão e variação de velocidade no fundo, chamada de SVP (Saint-Venant Plus) – mas sem nenhuma aplicação a casos práticos.

2.4. ESTUDOS SOBRE RUPTURA DE BARRAGENS

Neste item descrevem-se os estudos para o cálculo de uma onda de choque proveniente da ruptura de uma barragem.

2.4.1. PRIMEIROS ESTUDOS

O estudo das ondas de rupturas de barragens é antigo. O primeiro caso bem documentado é o de Johnstown, ocorrido em 1889, nos EUA, causando cerca de 2.200 mortes, mais de 11.000 desabrigados e prejuízos de aproximadamente 40 milhões de dólares (da época). Ferris (1889) apresentou uma descrição deste caso, sob diversos pontos de vista. A partir deste ponto, e até 1959, as pesquisas foram eminentemente teóricas. Foram desenvolvidos métodos analíticos para casos simples, como o método de Ritter, em 1892 – ver Stoker (1957) e Henderson (1966).

A partir da ruptura da barragem de Malpasset (na França, em 1959), iniciou-se o desenvolvimento de diversos métodos unidimensionais para o estudo da onda em casos reais, utilizando diferenças finitas. Desta época são clássicos os trabalhos de Strelkoff (1970) (métodos explícitos e implícitos, em uma dimensão, com seção transversal do rio variável), Sakkas e Strelkoff (1973) (unidimensional, método das características, leito seco a jusante em canal prismático) e Mahmood e Yevjevich (1975) – livro em três volumes sobre escoamento não permanente em canais das mais diversas formas (uma e duas dimensões, método das características ou diferenças finitas, em estuários ou rios, etc...).

Com a ruptura da barragem de Teton, nos EUA em 1976, os estudos neste campo se intensificaram ainda mais. Os trabalhos seguiram na linha de diferenças finitas, basicamente em uma dimensão, pois este era o método melhor adaptado ao problema e aos computadores da época, e produzia respostas razoavelmente rápidas e com precisão aceitável para a finalidade de proteção das populações ribeirinhas expostas a riscos de inundações. Na década que se seguiu, foram publicados centenas de artigos, propondo algoritmos utilizando basicamente

métodos de diferenças finitas e comparando os resultados obtidos com outros autores, testes de laboratório ou casos reais.

2.4.2. ESTUDOS COM MODELOS MATEMÁTICOS

A linha de pesquisa melhor sucedida foi iniciada em anos anteriores à ruptura de Teton por Danny L. Fread – ver Fread (1971, 1973, 1978); Fread e Harbaugh (1973) e Fread e Smith (1978) – e que culminou com o modelo DAMBRK (modelo em uma dimensão, com o ponto de vista Euleriano), com a última versão publicada em 1988 (Fread (1988a)), e resumo apresentado em Fread (1988b). Este modelo é o mais difundido a nível mundial para análise de ruptura de barragens de acumulação de água ou detritos, em canais com escoamentos sub ou supercríticos. Atualmente este código é parte integrante do FLDWAV, também do National Weather Service e do HEC-RAS, do U.S. Army Corps of Engineers, além de ter outras versões em software proprietário (por exemplo, o BOSS DAMBRK – http://www.bossintl.com/html/dambrk_overview.html). Sua abordagem é euleriana, ou seja, preocupa-se com as condições em seções pré-definidas, não se importando com a localização precisa da frente de onda em si.

Chen e Armbruster (1980) apresentaram uma solução para o rompimento de barragens utilizando o método das características 1D e ajuste do choque (com a utilização das equações de Hugoniot-Rankine, também chamadas de equações do choque), aplicando o seu modelo a um canal de seção transversal qualquer (no caso, com aplicação ao caso real de Johnstown).

Alguns autores estudaram a ruptura de barragens em modelos bidimensionais e os aplicaram a canais curvos ou rupturas com brechas (rupturas apenas em parte da largura do canal). Entre eles, podemos citar:

- Xantopoulos e Koutitas (1976), modelaram em duas dimensões com método explícito, aplicado a escoamento em canal de laboratório, com uma superfície quadrada representando uma planície de inundação. Obtiveram bons resultados para pequenas profundidades de escoamento e ruins para escoamentos mais profundos, o que incluiu o caso real simulado no trabalho;
- Katopodes e Strelkoff (1978), utilizam o método das características, com uma malha móvel (que vai se expandindo de acordo com o andamento da frente de

onda, com número fixo de pontos). O custo computacional dessa abordagem é alto, frente aos modelos de diferenças finitas em uma dimensão. Sugerem mais testes em modelos físicos, para melhorar a compreensão do fenômeno do rompimento de barragem e o desenvolvimento de modelos matemáticos que o represente mais precisamente. Comentam ainda que problemas são observados nas regiões de expansão do fluxo, onde a hipótese de distribuição hidrostática de pressões não se aplica;

- Miller e Chaudhry (1989), apresentam medições em um canal curvo, seção retangular em laboratório, com desvio de 180°. Utilizaram um método de diferenças finitas explícitas (Lax), para as equações escritas nas formas conservativa e não conservativa. Os resultados da forma conservativa se ajustaram bem aos resultados experimentais; a forma não conservativa localizou a onda em local mais a jusante e com níveis mais altos. Isto reforça a indicação de utilização de equações na forma conservativa, para reduzir os erros da simulação.

Katopodes e Schamber (1983) apresentaram cinco modelos baseados no método das características unidimensionais, e os aplicaram aos mesmos dados de laboratório (com e sem rugosidade). Fizeram uma análise do custo de rodar cada modelo, concluindo que o Zero Inércia é o mais barato (do ponto de vista de recursos necessários – máquina e homens-hora), mas mais limitado, enquanto o melhor é o Método das Características aplicado com diferenças finitas no tempo. A onda cinemática pode ser aplicada a calculadoras de bolso, de custo muito reduzido, mas com pequeno espectro de utilização.

Tonwson e Al-Sahili (1989) estudaram a onda gerada pela ruptura instantânea de uma barragem em um sistema de coordenadas r-t (canal retangular com paredes laterais convergentes, paralelas ou divergentes – modelo 1D axi-simétrico). O método de solução utilizado é o das características; os resultados obtidos por eles são coerentes com resultados obtidos em canais de laboratório.

Basco (1989) comenta algumas limitações das equações de Saint-Venant quando aplicadas à ruptura de barragens e propõe a adoção das equações de Boussinesq, que contém uma derivada cruzada no espaço e no tempo. Usa o método das Diferenças Finitas implícito, informando que os erros de truncamento – comuns a métodos numéricos – gerados pela aproximação numérica tendem a ser da mesma ordem de grandeza dos termos corretores da

hipótese de Boussinesq, o que obriga a que seja prestada muita atenção na precisão das contas realizadas e valores das variáveis armazenadas. Os resultados obtidos mostram que a utilização das equações de Boussinesq é mais importante para os pequenos tempos após a ruptura. Para longos períodos após o rompimento, as equações de Saint-Venant se mostram suficientes.

Mohapatra e Chaudhry (2004), utilizando as equações de Boussinesq, propõem a utilização de esquemas de 4ª ordem (pois as equações são de 3ª ordem), porém sem grande melhora nos resultados. Propõe a utilização das equações de Saint-Venant para o estudo de rompimento de barragem. Conclui, ainda, que apenas o primeiro termo dos três que surgem da correção de Boussinesq (o que contém uma derivada cruzada no espaço e no tempo) causa variação em relação às equações de Saint-Venant, tendo em vista a pequena contribuição dos outros dois termos. Indica que a importância desta correção de Boussinesq se apresenta quando a profundidade a jusante da barragem é da ordem de 40 %, ou superior, da profundidade de montante.

2.4.3. ESTUDOS NO BRASIL

No Brasil, destacam-se os trabalhos:

- Pasinato e Tucci (1992) apresentaram um modelo baseado em Preissmann Generalizado – 1D – separando o campo de estudo em função do tipo de escoamento e as equações de choque, e aplicaram esta metodologia a canais retangulares com rugosidade, declividade e largura constantes. Considerava, ainda, que no caso de mudança de regime de escoamento (supercrítico e subcrítico), o canal era dividido e cada trecho era resolvido separadamente. O método aplicado a casos da literatura, apresentou resultados coerentes;
- Mascarenhas e Silva (1987), Silva e Mascarenhas (1989) e Mascarenhas (1990) apresentam os métodos de solução para a onda de ruptura em uma dimensão, utilizando os pontos de vista euleriano e/ou lagrangeano (onde se localiza primeiramente o choque para depois calcular o escoamento no restante do canal), utilizando o método de diferenças finitas implícitas de Preissmann convencional. Os modelos apresentados por Mascarenhas são aplicáveis a canais retangulares ou trapezoidais, e foram aplicados a rupturas hipotéticas de barragens reais, em vales de rios. Os resultados obtidos não

podem ser comparados com reais, tendo em vista que os rompimentos não ocorreram, mas são coerentes com o esperado para escoamentos deste tipo;

- Costa (1978) aplicou o modelo SMPDBK (modelo DAMBRK simplificado), procurando quantificar os danos provenientes da ruptura hipotética da barragem de Três Marias, no rio São Francisco. Os resultados serviram de base para a delimitação da área da planície de inundação, ainda que de forma preliminar, tendo em vista o caráter expedito do modelo adotado;
- Nogueira (1984) procurou estabelecer o mecanismo de erosão do maciço das barragens de terra durante a ruptura e obter o hidrograma efluente pela brecha. Essa abordagem foi desenvolvida a partir do trabalho de Fread (1971, 1973), na geração do modelo BREACH. É um modelo baseado em transporte de sedimentos, calculando a erosão juntamente com o aumento da vazão na brecha formada;
- Collischonn (1997), em seu mestrado na UFRGS, estudou o hipotético rompimento da barragem de Ernestina, no rio Jacuí, Rio Grande do Sul, utilizando o software comercial DAMBRK (uma dimensão), apresentando as considerações do modelo e fazendo diversas análises de sensibilidade aos parâmetros de entrada. O estudo permitiu definir cenários de inundação no caso de ruptura e concluir que quanto mais perto da barragem, mais sensíveis são os resultados, frente aos dados de entrada.

Fabiani (1995) analisou o fenômeno de rompimento de barragem com o método das características em canal retangular, verificando a sensibilidade do desenvolvimento da onda a diversos parâmetros (como declividade do canal, rugosidade, largura do canal e profundidade a jusante). Foi utilizado o ponto de vista lagrangeano, ou seja, primeiro o choque foi localizado e caracterizado. Na sequência, os domínios definidos são calculados isoladamente e o resultado agrupado. O modelo proposto foi aplicado a dois casos constantes na literatura, com resultados coerentes com os anteriormente publicados. Adicionalmente, realizou estudos de sensibilidade à rugosidade do contorno, largura do canal, profundidade e velocidade do escoamento inicial e declividade do fundo do canal, além de aplicar o método proposto a um caso hipotético de ruptura, apresentando os possíveis resultados esperados neste caso.

Ainda no Brasil, diversas teses de doutorado na USP (Universidade de São Paulo) abordaram o tema de escoamento em canais, com análise de ruptura de barragens. Entre eles podemos destacar:

- Pereira (1996) confrontou as equações de Saint-Venant e de Boussinesq com a utilização de um esquema de diferenças finitas explícito de dois passos em uma dimensão (de Lerat-Peyret³), comparando-os com resultados experimentais. Concluiu que para o caso de leito seco a jusante, as equações de Saint-Venant representam bem o fenômeno. Em caso contrário (e mesmo para pequenas profundidades a jusante) sugere a utilização das equações de Serre (das quais considera que as equações de Boussinesq são uma linearização);
- Marcacuzco (1998) apresentou simulação numérica das equações de águas rasas, com SIMPLEC (método dos volumes finitos explícito) e pressão hidrostática, mas levando em conta efeitos de curvatura de fundo, em duas dimensões. A malha utilizada foi retangular e uniforme, com armazenamento co-localizado. Foi estudado apenas escoamento permanente, com bons resultados em termos de precisão, convergência e estabilidade.

2.4.4. OUTROS ESTUDOS PERTINENTES

Uma pesquisadora atuante é Pilar García-Navarro, de Zaragoza, Espanha, que tem publicado diversos artigos sobre escoamento não-permanente em canais. Entre eles destacamos o trabalho de García-Navarro e Vazquez-Cendron (2000), que apresentaram um tratamento diferente para os termos-fonte (normalmente são os termos de declividade do fundo – que introduz a força da gravidade – e os termos de perda de carga – gerada pela rugosidade do contorno e viscosidade do fluido), pois afirmaram que os resultados dos modelos numéricos são muito sensíveis ao tipo de tratamento dado a estes termos. Basicamente, recomendam manter nos termos de cálculo de fluxo apenas os termos conservativos, transferindo os demais

³ LERAT, A.; PEYRET, R. *Non centered schemes and shock propagation problems.*

Computers and Fluids, n. 2, p. 35-52, 1974.

componentes para o termo-fonte, incluindo a sua correção nas iterações já necessárias ao cálculo.

Hervouet e Jankowski (2000) usaram diretamente os modelos TELEMAC 2D e 3D (modelos da EDF – Electricité de France) para analisar escoamentos com distribuição não-hidrostática de pressões. Aplicaram pressão hidrostática na primeira iteração e depois corrigiram com uma variação na distribuição gerada pelo campo de velocidades. O custo computacional é da ordem de oito vezes superior para a aplicação da Equação de Boussinesq.

Realizado pela OTAN (Organização do Tratado do Atlântico Norte), o projeto CADAM envolveu toda a Europa com a finalidade de normatizar o estudo de rupturas e elaboração de planos de emergências. Uma jornada técnica, realizada em janeiro de 1999, realizou uma compilação das legislações europeias sobre segurança de barragens. O livro “*Dam Break Flood Risk Management in Portugal*”⁴, foi publicado em 2003 a partir de estudos deste projeto. Foram realizados quatro seminários a respeito, em um intervalo de um ano e meio – Wallingford, em março de 1998, Munique, em outubro de 1998, Milão em maio de 1999 e Zaragoza em novembro de 1999, que apresentaram 82 artigos abrangendo os temas de escoamentos uni e bidimensionais, volumes finitos com funções de interpolação (basicamente TVD), teoria sobre volumes finitos com malha triangular, dados estatísticos e avaliação da precisão dos mapas de inundação elaborados, simulação de células secas, utilização da fenda de Preissmann, entre outros pontos.

Caleffi *et al.* (2003) utilizou as equações de águas rasas com um esquema de discretização chamado HLL, justificando sua escolha dizendo que a função de interpolação MUSCL oscila muito sem a utilização de um limitador. O método proposto é de segunda ordem no espaço e no tempo. Foi aplicado, com malha retangular, a casos de rompimento em duas dimensões, com resultados comparados com os obtidos em modelo reduzido, apresentando boa aderência.

Gómez-Gesteira *et al.* (2004) apresentam um método lagrangeano de estudo de escoamentos, incluindo rupturas de barragens. Utilizou o SPH (Smoothed Particle

⁴ António Betâmio de Almeida, Carlos Alberto Matias Ramos, Maria A. Santos e Maria Teresa Fontela Viseu; *Dam Break Flood Risk Management in Portugal*; LNEC : Lisboa, 2003, 265 páginas.

Hydrodynamics), que analisa o movimento de partículas discretas do fluido, calculando os seus deslocamentos individuais (semelhante ao estudo do movimento simultâneo de diversos corpos sólidos que interagem entre si).

O trabalho de Bristeau *et al.* (2011) faz uma análise unidimensional, e simplifica a correção devida a não hidrostaticidade da pressão, criando um modelo intermediário entre Saint-Venant e Boussinesq, chamado de Saint-Venant Estendido, utilizando volumes finitos. Este modelo é aplicado a diversos casos com resultados experimentais, com bom ajuste. Já Yasuda (2010) comparou as formulações de Saint-Venant e Boussinesq – onde utilizou duas abordagens para a profundidade, concluindo que a utilização da profundidade total como propriedade do escoamento, ao invés da variação em relação a um nível de base – comum em trabalhos de hidráulica marítima – é mais ajustada a dados medidos em laboratório e em campo. Utiliza uma versão reduzida da formulação de Boussinesq, que diz ser precisa o suficiente (utilização apenas do primeiro termo da correção mostrada na equação (2.22)).

Os trabalhos de Lai *et al.* (2003a, 2003b) aplicam-se a escoamentos em três dimensões, mas apenas a escoamentos convencionais (naturais ou não, confinados ou em canais) e não ao rompimento de barragem (que possui características especiais de fortes gradientes de pressão e velocidades).

Elizarova e Bulatov (2011) apresentam a análise de ondas de ruptura de barragens a partir das equações de dinâmica dos gases em duas dimensões, utilizando diferenças finitas com esquema de discretização centrado, associado a processamento paralelo; os resultados obtidos são condizentes com os esperados. Betancourt *et al.* (2007) também trabalham com as equações de fluidos compressíveis, mas para escoamentos permanentes em canais com duas dimensões, com estreitamentos e soleiras, com bons resultados em casos com soluções analíticas; utilizaram o modelo PHOENICS, de escoamento de gases.

Já os trabalhos de Fagherazzi *et al.* (2004), Schwanenberg e Harms (2004), Kesserwari *et al.* (2008) e Sun e Sun (2011), tratam de análises com outros modelos matemáticos – em uma ou duas dimensões, com métodos numéricos de diferenças finitas ou de elementos finitos (Galerkin Descontínuo) e com a utilização do método de Runge-Kutta para avanço no tempo.

Ge *et al.* (2008) apresentam um modelo estocástico para determinação de escoamentos em uma dimensão, onde é possível introduzir a probabilidades na determinação da profundidade do escoamento, na sua velocidade e tempo de propagação.

Como demonstrado nas pesquisas acima citadas, vários autores têm se dedicado a campos correlatos ao proposto nesta pesquisa: ruptura de barragens, escoamento em duas dimensões, tratamento da pressão de forma não hidrostática em uma dimensão e mesmo em duas dimensões, mas sem o tratamento da declividade do fundo e da rugosidade do contorno.

Nenhum trabalho é apresentado na área específica desta linha de pesquisa: análise da necessidade da consideração ou não da distribuição não hidrostática de pressões (utilização das equações de Águas Rasas ou das equações de Boussinesq) em duas dimensões em rios com fortes gradientes de profundidade e velocidade – como o existente em rompimento de barragens, ou mesmo em alguns escoamentos fluidos. Este trabalho busca contribuir para o preenchimento desta lacuna na literatura técnica.

2.5. ASPECTOS TEÓRICOS-MATEMÁTICOS SOBRE ONDA DE RUPTURA

A seguir são apresentados os pontos teóricos necessários para o desenvolvimento dos trabalhos a serem apresentados no CAPÍTULO 3.

A onda gerada pela ruptura de uma barragem é uma onda de choque, ou de translação, de grandes dimensões (seja em termos de celeridade, velocidade ou altura). O estudo da sua formação e desenvolvimento pode ser realizado através de métodos analíticos (em casos especiais bastante simplificados) ou numéricos (nos casos reais). A ocorrência de choques em escoamentos de fluidos é descrita matematicamente em Cunge *et al.* (1980). A demonstração provém da natureza física do fenômeno, que conduz a equações diferenciais chamadas hiperbólicas; na região do espaço e do tempo onde ocorre o choque, as equações não mais admitem uma solução única. Assim, na região vizinha ao choque, a hipótese básica de continuidade da solução não é mais válida, necessitando-se equações que façam a ligação entre as regiões com escoamentos distintos.

Os modelos analíticos para o estudo da onda provocada pela ruptura de uma barragem tratam de casos muito particulares. Na literatura encontramos modelos deste tipo, que diferem basicamente pela ocorrência de ruptura em leito seco ou submerso a jusante. Dentre os modelos para leito seco a jusante em canais retangulares podemos destacar os propostos por

Ritter, em 1892 – método clássico – e Whitham, em 1955 – que introduz o efeito da rugosidade e da viscosidade na frente de onda – como mostrado por Mahmood e Yevjevich (1975) – para canais prismáticos não necessariamente retangulares. Para leitos submersos a jusante, o método original é o proposto por Stoker (1957). A seguir analisaremos esses métodos de maneira concisa. Maiores detalhes podem ser obtidos em Mahmood e Yevjevich (1975). Sakkas e Strelkoff (1973) e Mariles e Romero (1997) apresentam casos analíticos (para canais prismáticos de formas diversas) e, inclusive, modelos numéricos em uma e duas dimensões, porém bastante simplificados.

2.5.1. Soluções para o perfil da onda para leito seco a jusante – método de Ritter

É o mais antigo método proposto para o estudo da onda resultante da ruptura de uma barragem. Ele parte da retirada gradual e com velocidade constante, no sentido do escoamento, de um obstáculo existente no leito do rio (ver Figura 2.1.a). Suas hipóteses básicas são:

- Contribuição lateral nula;
- Canal retangular com fundo horizontal;
- Fluido ideal (sem resistência);
- Abertura total (na largura), com retirada do obstáculo a velocidade constante para jusante.

No caso de ruptura de uma barragem, o obstáculo é retirado com grande velocidade, não mais interferindo no escoamento. A frente de onda avança no leito seco a jusante com velocidade igual ao dobro da celeridade inicial e a onda negativa (que se desloca para montante) possui velocidade igual à celeridade (ver Figura 2.1.b). A velocidade de retirada (simbolizada pela letra w) deve ser assumida maior ou igual a duas vezes a celeridade da onda ($C_1 = \sqrt{gh_1}$), isto é:

$$w \geq 2\sqrt{gh} \quad (2.24)$$

Devido a estas simplificações, o perfil da superfície livre resulta parabólico, seguindo as equações (2.25) e (2.26):

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gh_1} \right) \\ h(x, t) = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_1} - \frac{x}{t} \right)^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Na seção da barragem ($x = 0$) teremos escoamento permanente, com profundidade e velocidade constantes de acordo com as relações das equações (2.27) e (2.28):

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{4}{9} h_1 \\ h(x, t) = \frac{2}{3} \sqrt{gh_1} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

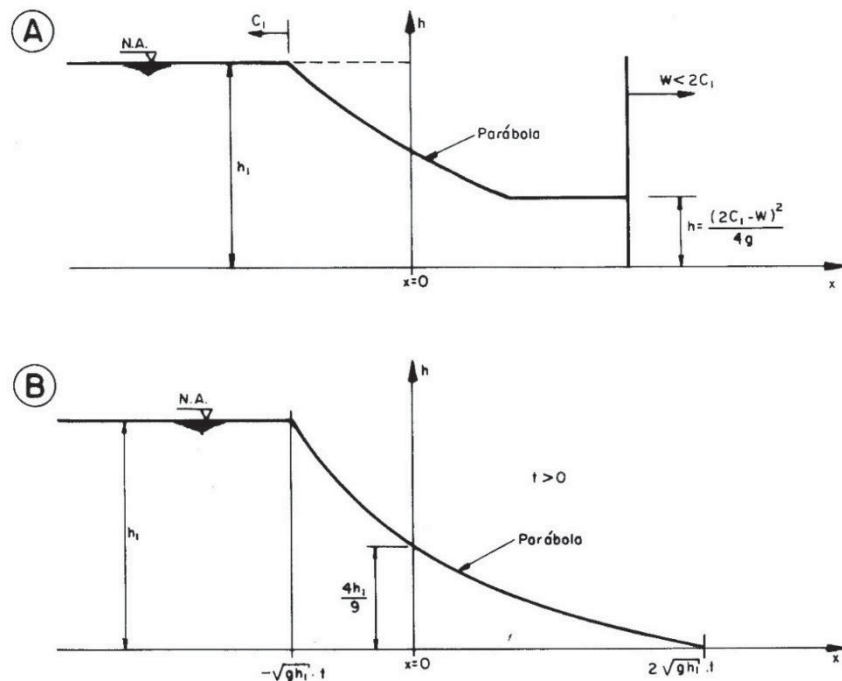


Figura 2.1 - Solução de Ritter para a remoção total de uma parede retangular; a retirada é: a) "gradual" ou b) "instantânea" (Henderson (1966), Mascarenhas (1990) e Fabiani (1995))

2.5.2. Soluções para o perfil da onda para leito submerso a jusante – método de Stoker

É um método derivado do método de Ritter, porém admite escoamento e, portanto, profundidade a jusante da barragem no instante inicial da ruptura (ver Figura 2.2).

Neste método, devido à existência prévia de um nível de água a jusante – com ou sem fluxo – forma-se uma onda semelhante a um ressalto hidráulico móvel, e cujas

características são calculadas a partir da solução do sistema de equações não-lineares (2.29) a (2.31):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(w - v_4)^2}{gh_4} = \frac{1}{2} \frac{h_3}{h_4} \left(\frac{h_3}{h_4} + 1 \right) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (w - v_4)h_4 = (w - v_3)h_3 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3 = -2\sqrt{gh_3} + v_1 + 2\sqrt{gh_1} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Onde w é a celeridade da onda de choque (m/s). As demais variáveis encontram-se representadas na Figura 2.2.

As equações (2.29) a (2.31) representam a conservação da quantidade de movimento (2.29), da massa (2.30) e juntamente com uma equação da característica positiva (2.31), que permite o fechamento do sistema de equações. Uma descrição sucinta do método das características pode ser encontrada no item 2.6.1.

O escoamento na seção primitiva da barragem será permanente se $0 \leq h_4/h_1 \leq 0,138$. Neste caso, a profundidade e a velocidade nessa seção são obtidas através das equações de Ritter aplicadas à seção da barragem (equações (2.25) e (2.26)). Caso $h_4/h_1 > 0,138$, a vazão, a velocidade e a profundidade tornam-se função de h_4 (Stoker (1957)). Stoker (1957) apresenta, ainda, uma relação gráfica entre a altura da onda ($h_3 - h_4$) e a profundidade a montante da barragem antes da ruptura (h_1); esta relação é máxima (e igual a $0,32.h_1$) para $h_4/h_1 = 0,176$.

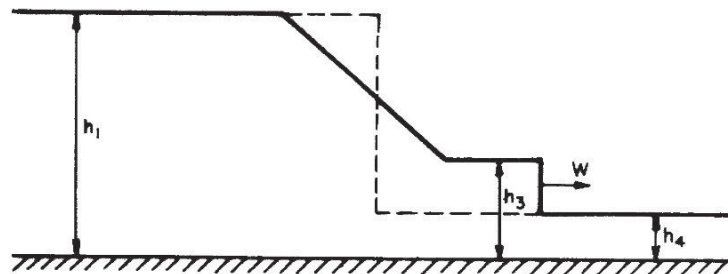


Figura 2.2- Perfil longitudinal para os tempos: $t=0$ (---) e $t>0$ (—) – Método de Stoker (Townson e Al-Sahili (1989) e Fabiani (1995))

2.5.3. Softwares comerciais ou de domínio público

Na categoria de simulação de escoamento real unidimensional encontra-se o software comercial mais difundido, o DAMBRK (que hoje em dia se encontra acoplado ao modelo computacional HEC-RAS, entre outros, não mais operando de modo isolado). Ele utiliza equações de Saint-Venant completas – evolução das equações (2.17) e (2.18) – que permitem analisar canais com seções variáveis, fluxos laterais e outras características que o tornam bastante flexível para utilização em casos reais. Ele necessita de diversos parâmetros para determinação das condições de rompimento e geração da onda. Uma forma de obter tais parâmetros, para barragens de terra ou de enrocamento é o programa BREACH, com interface gráfica em Java, mas que opera ainda de forma isolada. Os softwares citados são de domínio público. Existem softwares comerciais que fazem a interface do DAMBRK, mas que sofrem forte concorrência dos softwares de domínio público. Um modelo simplificado é o SMPDBK, que também apresenta atualmente uma interface gráfica Java intuitiva, mas é aplicável apenas a canais de grande declividade.

2.5.4. Análise de ondas de choque sob pontos de vista euleriano e lagrangeano

A proposta desta pesquisa é analisar as ondas com formulação bidimensional, fazendo uso do ponto de vista euleriano (também chamado de captura do choque), pois se busca uma solução de engenharia para a localização da posição da frente de onda dentro da própria formulação. A análise de um ponto de vista lagrangeano, ou ajuste do choque, teria um alto custo computacional, principalmente em problemas em duas dimensões. Neste caso, primeiro define-se o andamento da frente de onda no passo de tempo, para depois se determinar as características do escoamento no canal como um todo, separadamente para o trecho de montante e de jusante.

No caso do escoamento em duas dimensões é incluída a análise da equação da quantidade de movimento na direção y , o que faz aumentar bastante o volume de cálculo necessário. Por outro lado, as equações resultantes são mais simples do que as utilizadas no caso da análise de um escoamento real em uma dimensão, pois termos como área, perímetro, raio hidráulico, largura de escoamento, largura de armazenamento e vazão são diretamente relacionados às variáveis independentes (h , u e v), e não funções por vezes complexas destas variáveis. Neste caso, as equações de águas rasas são utilizadas (ver item 2.2.2). As maiores dificuldades, no caso de modelos em duas dimensões são referentes aos contornos. Podemos

ter, ainda, grande variação de largura de seção, o que pode complicar a montagem do sistema de equações.

Uma operação delicada, tanto em modelos em uma como em duas dimensões, é a consideração do “molhamento” e do “secamento” de volumes junto às margens. Isto implica em que as fronteiras do modelo sejam móveis, via de regra. A consideração de uma área maior, que uniformize os volumes e fixe as fronteiras afastadas do problema em foco, pode introduzir instabilidades e dissipações, além de aumentar o volume de cálculo.

2.6. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS HIDRÁULICOS

Neste tópico são apresentadas considerações a respeito de alguns dos métodos mais utilizados para a solução de problemas expressos por equações diferenciais parciais. Alguns pontos serão mais detalhados, tendo em vista que serão utilizados neste trabalho. Outros, apenas citados.

2.6.1. Método das Características

É um método de solução de equações diferenciais parciais, que consiste na determinação de linhas (para problemas em duas dimensões: x e t) ou superfícies (para mais dimensões) que transportam características/propriedades do problema das fronteiras para pontos interiores vizinhos e, progressivamente, por todos os pontos do domínio.

No caso de equações hiperbólicas, como as equações de Águas Rasas 1D ou 2D, temos duas famílias de curvas características. Basicamente o método transforma o par de equações diferenciais parciais em dois pares de equações diferenciais ordinárias, de solução mais simples.

Este método é pouco recomendado para problemas multidimensionais reais, onde existem fontes, sumidouros, rugosidade, e outras propriedades envolvidas, pois nesse caso a solução torna-se altamente iterativa. No entanto, este método é muito bom para analisar problemas nas fronteiras, fronteiras móveis e, principalmente, na imposição das condições de contorno.

2.6.2. Método das Diferenças Finitas

É um método muito utilizado para a solução de equações diferenciais, partindo da expansão das derivadas em séries de Taylor ou através de ajustes de polinômios. O domínio é

subdividido em porções onde são escolhidos pontos discretos (por exemplo, afastados de Δx e de Δy), onde a solução será obtida através de uma equação algébrica. É o método mais antigo (data do século XVIII) e é o mais fácil de aplicar para geometrias simples.

Os valores das derivadas nas equações são substituídos pela expansão em série de Taylor, a qual é truncada para permitir a obtenção de uma solução. Chamando-se de $f(x)$ uma função de x , o seu valor em $(x_i + \Delta x)$ será calculado como:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \quad (2.32)$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \left[\frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \right] \quad (2.33)$$

Normalmente chama-se de erro a parte entre colchetes na equação (2.33), representado por $\mathcal{O}(\Delta x)$. A ordem do erro é o menor expoente de Δx no termo. Esta expansão pode mudar de acordo com o estêncil (padrão) de pontos a serem utilizados. A Figura 2.3 apresenta três formas simples de calcular uma derivada numericamente – avante, central e a ré.

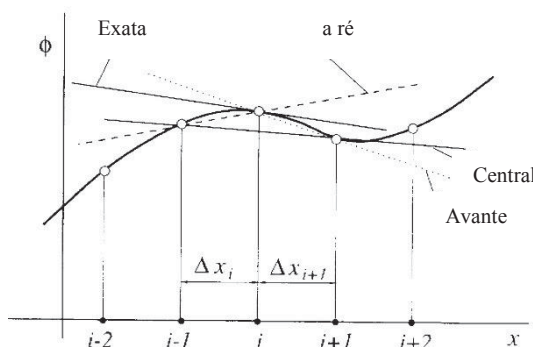


Figura 2.3 - Discretização do domínio através de diferenças finitas (figura 3.2 de Ferziger e Perić (1999))

Com isto, transformam-se as equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas com a aplicação das equações governantes aos pontos discretos, mostrados na Figura 2.4.

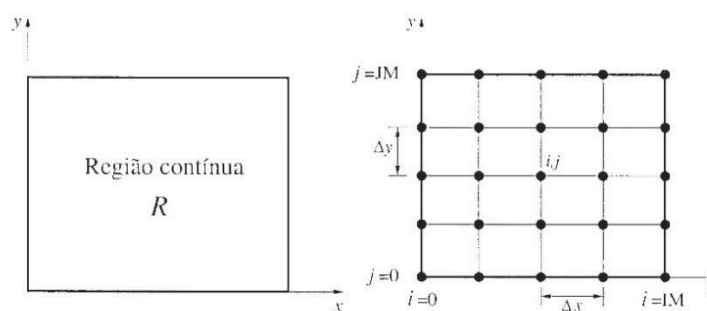


Figura 2.4 - Discretização do domínio através de diferenças finitas (figura 3.1 de Fortuna (2000))

Com os passos acima, temos um sistema de equações com tantas equações quantas são as incógnitas no domínio (número de variáveis em um nó vezes o número de nós).

Maiores explicações podem ser obtidas em Fortuna (2000).

2.6.3. Método dos Volumes Finitos

Este método consiste em discretizar o domínio de aplicação da equação diferencial em pequenas porções do espaço contendo um volume de fluido. Estas porções, denominadas volumes finitos, são normalmente representadas por um ponto interior, normalmente central, e por superfícies de contorno (sólido – contorno do domínio – ou interface com outro volume de fluido).

Segundo Maliska (1995), o método dos volumes finitos obtém as suas equações aproximadas a partir de balanços das propriedades em questão nos volumes elementares (ou finitos). De maneira equivalente, podemos obter as equações aproximadas a partir da equação diferencial na forma conservativa e integrando-a no volume elementar.

O Método dos Volumes Finitos diferencia-se do Método das Diferenças Finitas por este fazer aproximações das funções em cada ponto da malha, enquanto aquele faz uma integração em um volume de fluido, aproximando este resultado. Para alguns esquemas de discretização, as equações resultantes são idênticas, ainda que obtidas por caminhos diferentes, a partir das mesmas equações diferenciais originais.

As aproximações no espaço podem ser de diversas ordens, como pode ser visto na Figura 2.3. As aproximações ditas “avante” e “a ré” são de primeira ordem, enquanto a diferença central é de segunda ordem. Segundo Maliska (1995), podemos dizer que (observando a Figura 2.5):

- Os esquemas de segunda ordem usam para determinação dos valores nas faces uma interpolação linear entre os valores dos volumes vizinhos. Este tipo de média pode causar oscilações numéricas.
- Já os esquemas de primeira ordem utilizam somente os valores dos volumes a montante ou somente os de jusante, o que pode causar difusão numérica.

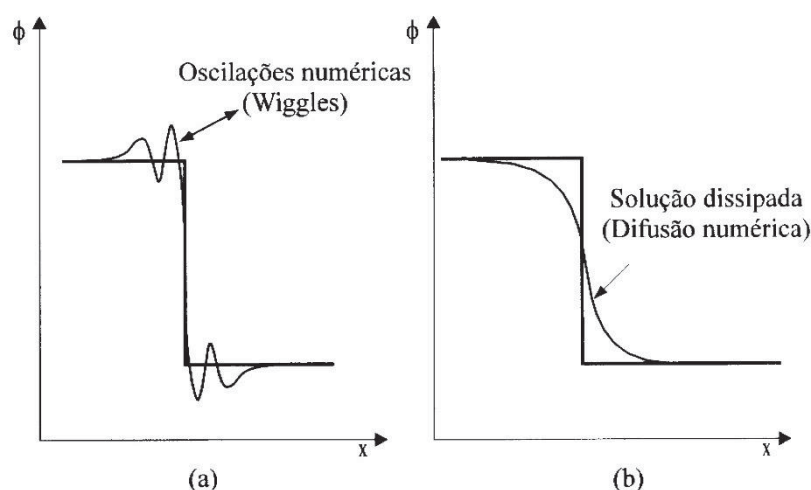


Figura 2.5 - Pulso analítico e solução numérica com oscilações e dissipação (figura 5.2 de Maliska (1995))

No caso das equações de Águas Rasas, 1D ou 2D, estas são classificadas como equações diferenciais parciais (EDP) hiperbólica ou parabólica (em alguns casos), em função do tipo de escoamento (fluvial ou torrencial) e da magnitude/importância dos termos dissipativos. Maiores explicações sobre esta classificação podem ser obtidas em Maliska (1995) e Fortuna (2000). Essas equações necessitam de condições iniciais e de condições de fronteira, ou de contorno. Possuem termos dissipativos (referentes à viscosidade) e advectivos (onde as propriedades são transportadas pela velocidade do escoamento).

O esquema de aproximação por diferenças centrais é, segundo Maliska (1995), muito bom para representar os processos difusivos. No entanto, sua aplicação aos termos advectivos pode causar instabilidade ou mesmo a não convergência da solução. Isto ocorre pois neste esquema, e para malhas não excessivamente refinadas (casos práticos), ocorre a formação de coeficientes negativos na matriz, o que causa instabilidade. A utilização de aproximações de altas ordens nos termos advectivos quando estes forem dominantes, normalmente gera instabilidades, produzindo soluções com oscilações numéricas em regiões de grandes

gradientes (o que é o caso no estudo de ruptura de barragens). A Figura 2.5 mostra uma solução convergida para um pulso, apresentando oscilações (a) ou difusão numérica (b), conforme o esquema numérico utilizado. Uma maneira de evitar o coeficiente negativo no sistema é utilizar o esquema de diferença “a ré”, ou a montante. Este tipo de esquema apresenta todos os coeficientes positivos, mas a sua solução é dissipada e não captura o gradiente real do problema, como pode ser visto na mesma Figura 2.5.

Um esquema que combina as vantagens desses dois métodos é o esquema de correção adiada nos termos advectivos no esquema de segunda ordem. Ele pode, inclusive, levar em conta a alteração na direção do fluxo, com a consideração do sinal da velocidade. Consiste em se adotar o valor da velocidade obtida em uma iteração anterior, o que mantém a criação de oscilações (típico de esquemas de 2ª ordem) contidas pelo amortecimento observado nos métodos de 1ª ordem. A introdução desse esquema torna a obtenção dos coeficientes mais complexa que nos processos tradicionais. Com respeito aos coeficientes, temos que apenas os termos independentes, ou termo fonte, diferem dos coeficientes obtidos com o esquema de primeira ordem; os coeficientes vinculados aos volumes resultam exatamente iguais, uma vez que a correção é adiada, ou seja, é transportada ao termo fonte.

Outros esquemas podem ser propostos, buscando manter as qualidades dos esquemas e minimizando os seus “defeitos”. Em Maliska (1995) encontramos outros seis esquemas de interpolação. Em Tannehill *et al.* (1997) são apresentados diversos outros esquemas.

2.6.4. Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é muito utilizado para a solução aproximada de equações diferenciais. Consiste em encontrar funções de interpolação das variáveis que sejam válidas em intervalos espaciais pré-definidos, os chamados elementos finitos. Entretanto, para os problemas com fortes descontinuidades (como é o caso da frente de onda gerada pela ruptura de uma barragem) os métodos convencionais dos elementos finitos não são diretamente aplicáveis, pois tentam suavizar as transições entre elementos, obtendo uma solução contínua. Uma descrição deste método geral pode ser obtida em Becker *et al.* (1981, p. 2 e seguintes), de onde tiramos as descrições abaixo apresentadas.

São dois os métodos tradicionais de Elementos Finitos:

- Métodos Variacionais Diretos (ex. Método de Raleigh-Ritz); ou
- O Método dos Resíduos Ponderados (ex. Método de Galerkin).

O primeiro método é aplicável a fenômenos que possuem um Funcional, isto é, uma função de funções, para a qual a integração conduz à resposta das variáveis originais. Este tipo de abordagem é possível em alguns fenômenos – por exemplo, análise estrutural – mas não em todos. A Mecânica dos Fluidos não se encaixa nesta categoria.

Para a Dinâmica dos Fluidos é necessário, portanto, utilizar o Método dos Resíduos Ponderados, cujo método mais utilizado é o de Galerkin.

O método dos resíduos ponderados consiste em criar uma aproximação para as variáveis através de funções de aproximação conhecidas, mas com coeficientes a determinar. Esta equação aproximada é integrada no espaço, com a utilização de uma função peso, que conduzirá a um erro mínimo (seja no valor da variável nos pontos – solução chamada de forte – ou no valor da integral em todo o domínio – denominada solução fraca).

Vamos exemplificar o método de uma maneira simples, utilizando a equação diferencial (2.34) abaixo,

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = x \quad (2.34)$$

Definida no intervalo $[0 < x < 1]$ e sujeita às seguintes condições de contorno:

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0. \quad (2.35)$$

Devemos encontrar uma função $u(x)$ que satisfaça a equação e as restrições acima (equações (2.34) e (2.35)), que seja válida em intervalos e possua uma forma simples (por exemplo, polinômios). Como temos uma derivada segunda, as equações devem ser, no mínimo, duas vezes diferenciáveis. Desta maneira teremos uma “função resíduo” $R(x)$ dada pela equação (2.36):

$$R(x) = -\frac{d^2u}{dx^2} + u - x \quad (2.36)$$

Para minimizarmos o erro no resíduo em todo o domínio, devemos ponderá-lo com uma função peso ($v(x)$). Assim, teremos:

$$\int_0^1 R(x)v(x)dx = 0 \quad (2.37)$$

Ou ainda:

$$\int_0^1 \left[-\frac{d^2u}{dx^2} + u - x \right] v(x)dx = 0 \quad (2.38)$$

Utilizando-se polinômios para as funções $u(x)$ e $v(x)$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i(x) \quad (2.39)$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \theta_i(x) \quad (2.40)$$

Onde α_i e β_i são coeficientes a determinar.

O método de Galerkin consiste em utilizar $\psi_i(x) = \theta_i(x)$, ou seja, utilizar as mesmas funções na aproximação e na função peso. Neste caso os β_i podem assumir qualquer valor, desde que a equação seja reduzida a

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} \alpha_j - f_j = 0 \text{ para } j=1, 2, \dots, N \quad (2.41)$$

No sistema de equações representado pela equação (2.41) temos que N é o número de elementos finitos, α_i é o valor de $u(x)$ em cada ponto (solução procurada), K_{ij} é conhecida como matriz de rigidez, e depende do problema e das funções de aproximação utilizadas e f_j é o vetor fonte, ou de termos independentes.

Estes coeficientes podem ser mapeados de um domínio real para um domínio virtual, onde o cálculo é generalizado, sendo montado o conjunto todo de equações em função das coordenadas espaciais do problema em questão. As funções resultantes desta análise resultam contínuas no domínio, muito embora as funções de interpolação não o sejam.

Katopodes (1984) apresenta uma forma alternativa para as funções de interpolação que permite capturar descontinuidades no escoamento. Estas funções são conhecidas como hermitianas, e apresentam degraus embutidos e imposição de derivadas descontínuas nas faces do elemento. Dziedzic (1988) utilizou este método de forma computacional aplicado a diversos exemplos em canal retangular. Arnold (1996) apresenta um modelo bidimensional em elementos finitos que conduziu a bons resultados quando comparados com os resultados obtidos por ele em modelo físico; o método numérico é semelhante aos anteriormente citados, incluindo um tratamento especial para células do contorno, que secam ou molham com a passagem do escoamento. Este método é utilizado para solução de escoamentos em rios, baías e estuários, onde os escoamentos não apresentam as fortes descontinuidades inerentes a escoamentos

gerados por rupturas de barragens ou mesmo ondas de choque abruptas. Este método é, ainda, a base de um grande número de softwares comerciais existentes.

2.6.5. Método de Galerkin Descontínuo

Este método admite que as funções resultantes sejam descontínuas entre os elementos, permitindo a introdução de fluxos nos contornos. Desta maneira, o método passa a analisar descontinuidades como, por exemplo, frentes de onda. Da mesma forma, este artifício matemático permite zerar o resíduo citado no item anterior dentro de cada elemento, trazendo para o método dos elementos finitos a grande vantagem do método dos volumes finitos, o qual fecha o balanço de massa e de forças em cada elemento. Este método normalmente é combinado com a aproximação no tempo pelo método de Runge-Kutta, e aparece na literatura como RKDG (Runge-Kutta Galerkin Discontinuous).

Segundo Cockburn e Shu (2001) e Schwanenberg (2003), esta não continuidade de funções deve ser controlada através de limitadores de valores ou de inclinações, que são funções semelhantes às aproximações de TVD (Total Variation Diminish) nos métodos de Volumes Finitos. Este tipo de aproximação busca evitar fortes descontinuidades – de origem numérica – que podem conduzir a simulação a apresentar grandes instabilidades.

Schwanenberg (2003) apresenta a aplicação do método de Galerkin Descontínuo às Equações de Saint-Venant e de Águas Rasas. Tal apresentação será descrita a seguir, já sendo incluído o termo referente à correção de Boussinesq, ponto principal deste trabalho.

As equações de Águas Rasas podem ser escritas de maneira vetorial e conservativa conforme a equação (2.42), abaixo apresentada.

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = S(U) \quad (2.42)$$

Onde:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{\partial B}{\partial x} \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

E B será dado pela equação (2.47), a ser deduzida no item 3.2 deste texto em uma forma útil computacionalmente, e que representa a correção de Boussinesq para as equações de Águas Rasas, levando em conta a distribuição não-hidrostática de pressões em duas dimensões. Este termo já aparece aqui sendo deslocado para o termo fonte, o que induz a uma solução com correção adiada, descrita no item 2.6.3. Esta forma de tratamento está de acordo com a orientação de García-Navarro e Vazquez-Cendron (2000), de tratar nos métodos numéricos os termos convectivos, transportando os demais componentes para o termo fonte, para correções adiadas.

Em termos mais elegantes matematicamente, podemos escrever o termo de correção de Boussinesq, \underline{B} , da seguinte forma:

$$B = \frac{h^2}{3} \frac{d^2 h}{dt^2} \quad (2.47)$$

O Método dos Elementos Finitos multiplica a equação original por uma função peso (ψ) e a integra em cada elemento \underline{K} , como descrito pela equação (2.48):

$$\int_K \left(\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) - S(U) \right) \psi dx dy = 0 \quad (2.48)$$

Onde devemos trocar a incógnita U pela sua aproximação U_h , dada pela equação (2.49).

$$U_h = \sum_{i=1}^n U^i \psi_i(x) \quad (2.49)$$

No método RKDG as discretizações espaciais e temporais podem ser totalmente separadas, pois este é um processo explícito. Desta forma, podemos escrever a equação (2.42) na forma da equação (2.50) abaixo:

$$\partial_t U + \nabla(F(U, \nabla U), G(U, \nabla U)) = S(U) \quad (2.50)$$

Onde podemos deixar explícito que as incógnitas são a profundidade (h) e os fluxos nas direções x e y ($q_x = h \cdot u$, $q_y = h \cdot v$). Os vetores podem ser escritos como nas equações (2.51) a (2.54), onde é introduzido o conceito de viscosidade turbulenta (v_t), a fim de permitir a dissipação de energia – noção esta vinda das equações de Navier-Stokes.

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 - 2v_th\partial_x\left(\frac{q_x}{h}\right) \\ \frac{q_xq_y}{h} - v_th\left(\partial_x\frac{q_y}{h} + \partial_y\frac{q_x}{h}\right) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_xq_y}{h} - v_th\left(\partial_y\frac{q_x}{h} + \partial_x\frac{q_y}{h}\right) \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 - 2v_th\partial_y\left(\frac{q_y}{h}\right) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{\partial B}{\partial x} \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Na maior parte das aplicações realizadas por Schwanenberg (2003), e nos trabalhos aqui apresentados, a viscosidade adicional é desconsiderada, restando apenas a consideração da perda de carga, normalmente por Manning.

O método de Galerkin Descontínuo necessita, para garantir a sua estabilidade e convergência, de controle dos fluxos existentes nas fronteiras dos elementos. Dessa maneira a criação de oscilações numéricas fica contida. São técnicas conhecidas em geral por TVD – *Total Variation Diminish*. Uma descrição detalhada do avanço destas técnicas pode ser observada em Cockburn e Shu (2001) e Schwanenberg (2003).

Lai e Khan (2012) aplicaram este método RKDG a rupturas de barragens em duas dimensões, utilizando as equações de águas rasas, com bons resultados obtidos para os casos analisados. Entre eles estava o caso da ruptura de Malpasset.

Silva (2015), em seu trabalho de mestrado, analisa o método com utilização de altas ordens para problemas hiperbólicos. Propõe que o controle de estabilidade do método seja realizado com a utilização de funções constantes ou lineares com limitadores de inclinação, o que permitiu o controle de oscilações nos casos por ele analisados, que foram sistemas de equações diferenciais parciais hiperbólicos em uma dimensão espacial, desconsiderando a existência de termo fonte.

2.7. MÉTODOS QUE CONSIDERAM A VARIAÇÃO NO TEMPO

Os métodos apresentados até agora são aplicáveis apenas a equações diferenciais com variação espacial. A variação no tempo não segue estes métodos.

Para a aproximação das derivadas temporais normalmente é utilizada uma ponderação entre os valores no tempo conhecido e os valores no tempo de cálculo.

Fazendo uso de um parâmetro de ponderação no tempo θ (com $0 \leq \theta \leq 1$) teremos para as variáveis (h) e (uh) – em uma dimensão apenas, por simplicidade de explicação – segundo Maliska (1995):

$$(h)^\theta = (h)^0 + \theta[(h) - (h)^0] \quad (2.55)$$

$$(uh)^\theta = (uh)^0 + \theta[(uh) - (uh)^0] \quad (2.56)$$

As demais variáveis seguem o mesmo processo de formação. O superíndice θ indica que o valor é o correspondente ao tempo anterior (conhecido), enquanto a falta de superíndice indica que o valor é tomado no instante de tempo desconhecido (que está sendo calculado no momento). Quanto ao valor de θ , podemos dizer que:

- Se $\theta = 0$, teremos um esquema explícito, onde os valores no tempo futuro são função somente dos valores no instante de tempo anterior;
- Se $\theta = 1$, teremos um esquema totalmente implícito, onde os valores no tempo futuro são função somente do valor no instante de tempo anterior no ponto e dos valores vizinhos no instante de tempo futuro, o que cria uma forte vinculação entre eles, no futuro;
- Se $(0 < \theta < 1)$ teremos um esquema implícito, onde os valores no tempo futuro são função dos valores no tempo anterior e, também, dos valores no

instante de tempo futuro. Com isto, calculam-se valores das variáveis em posições intermediárias no tempo.

No caso de $\theta = 0,5$, temos um caso especial, chamado de esquema de Crank-Nicolson⁵.

A Figura 2.6 mostra os nós que se relacionam ao nó P em cada caso.

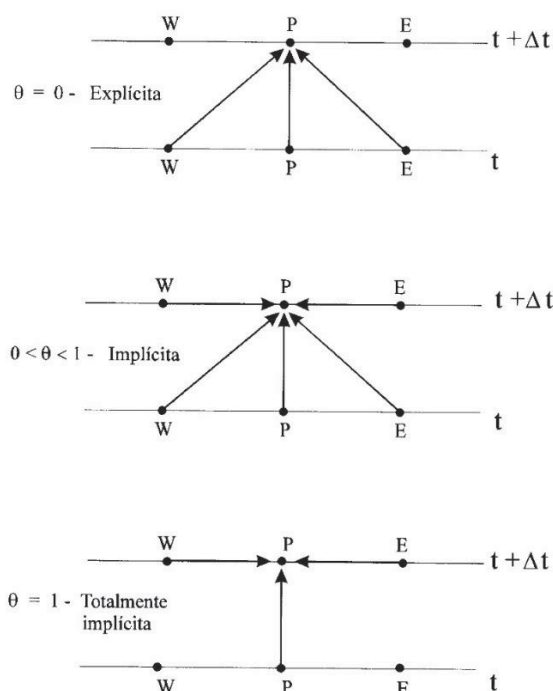


Figura 2.6 - Relacionamento dos nós para cada esquema de interpolação no tempo (figura 3.5 de Maliska (1995))

Este esquema para tratamento das derivadas temporais é utilizado em praticamente todos os métodos de solução (diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos).

Todos estes métodos apresentados resultam em uma aproximação de 1ª ordem para o tempo.

⁵ Crank, J.; Nicolson, P. (1947). *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type*, **Proc. Camb. Phil. Soc.** **43** (1): 50–67. doi:10.1007/BF02127704.

Um esquema adicional aos anteriormente expostos é conhecido como Métodos de Runge-Kutta (pois são vários os métodos em função da ordem de aproximação e de escolhas de constantes). Os métodos são detalhadamente apresentados em Valle (2012). Ele é um método recursivo, e pode ser de alta ordem, ainda que sempre explícito. O método pode ser de qualquer ordem, mas como os métodos de Runge-Kutta podem aproximar exatamente polinômios de ordem $(2N-1)$, o método de ordem mais alta comumente utilizado é o de 4ª ordem, que aproxima exatamente polinômios até de 7º grau.

Os métodos de Runge-Kutta consistem em se comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, realizando-se diversos cálculos sucessivos da função em cada passo. Os métodos diferenciam-se basicamente pela ordem do polinômio utilizado. Utilizando-se o polinômio de Taylor com resto de ordem k , e se a função $y(x)$ possuir $(k+1)$ derivadas contínuas no intervalo aberto entre x_n e x_{n+1} , podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n) \frac{(x_{n+1} - x_n)}{1!} + \dots + y^{(k)}(x_n) \frac{(x_{n+1} - x_n)^k}{k!} \\
 &\quad + y^{(k+1)}(x_n) \frac{(x_{n+1} - x_n)^{k+1}}{(k+1)!}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Onde c é algum número entre x_n e x_{n+1} . A distância entre x_n e x_{n+1} é denominada h . Vamos a seguir apresentar os métodos mais usuais.

2.7.1. Método de Runge-Kutta de 1ª ordem, ou Método de Euler

Utilizando $k=1$ na equação (2.57) e desprezando-se o erro $\frac{h^2}{2!} y''(c)$, por ser muito pequeno, obtemos a fórmula de Runge-Kutta de 1ª ordem, que é igual à fórmula de Euler, que pode ser escrita como

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{2.58}$$

A Figura 2.7 apresenta essa formulação de forma gráfica, destacando o erro cometido neste tipo de formulação.

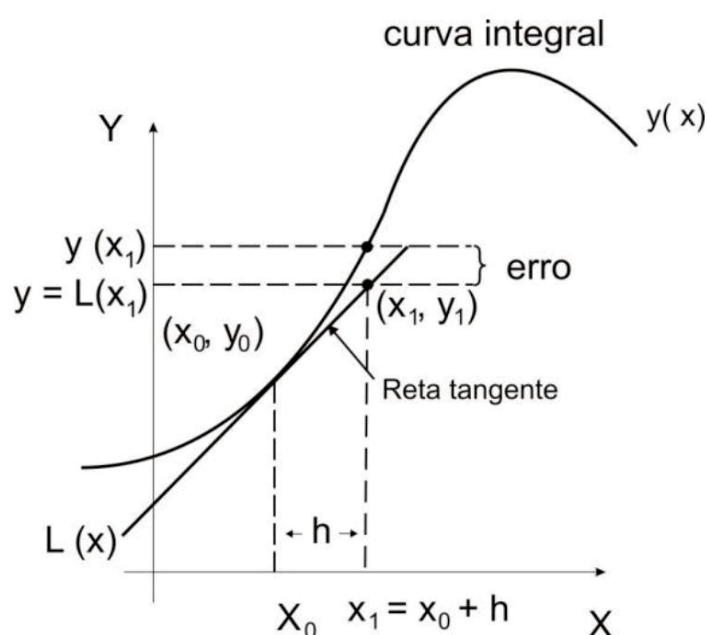


Figura 2.7 - Visualização gráfica do método de Euler ou de Runge-Kutta de 1ª ordem (Valle (2012, p. 14))

2.7.2. Método de Runge-Kutta de 2ª ordem, ou Método de Euler Melhorado

Fazendo-se $k=2$ na formulação de Runge-Kutta, teremos:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(c) \quad (2.59)$$

Onde o termo de erro $\frac{h^3}{3!}y'''(c)$ pode ser desprezado.

Podemos escrever a equação (2.59) da seguinte forma:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\varphi(x_n, y_n; h) \quad (2.60)$$

Onde $\varphi = ak_1 + bk_2$. Procurando determinar a e b (constantes) e k_1 e k_2 funções capazes de igualar a aproximação ao polinômio de Taylor, tem-se:

$$h\varphi(x_n, y_n; h) = h(ak_1 + bk_2) = h\left(y'(x_n) + \frac{h}{2}y''(x_n)\right) \quad (2.61)$$

Considerando $k_1 = y'(x_n)$ e $k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1)$. Expandindo k_2 em uma série de Taylor, teremos um sistema de equações da seguinte maneira:

$$\begin{cases} ak_1 + bk_2 = (a+b)f(x_n, y_n) + b\alpha h \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + b\beta hf(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} \\ y'(x_n) + \frac{h}{2}y''(x_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + f(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (2.62)$$

Resolvendo-se o sistema, teremos:

$$a + b = 1; b\alpha = 1/2; b\beta = 1/2. \quad (2.63)$$

Que possui infinitas soluções. Adotando-se $a = b = 1/2, \alpha = 1, \beta = 1$, temos um dos métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem mais tradicionais, que é o método de Euler melhorado. Este método pode ser visto graficamente na Figura 2.8, onde podemos ver que ao invés de avançar com a inclinação do ponto inicial, faz-se uma média entre as inclinações dos pontos inicial e final, melhorando a aproximação. A equação resultante é:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \quad (2.64)$$

Onde $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$.

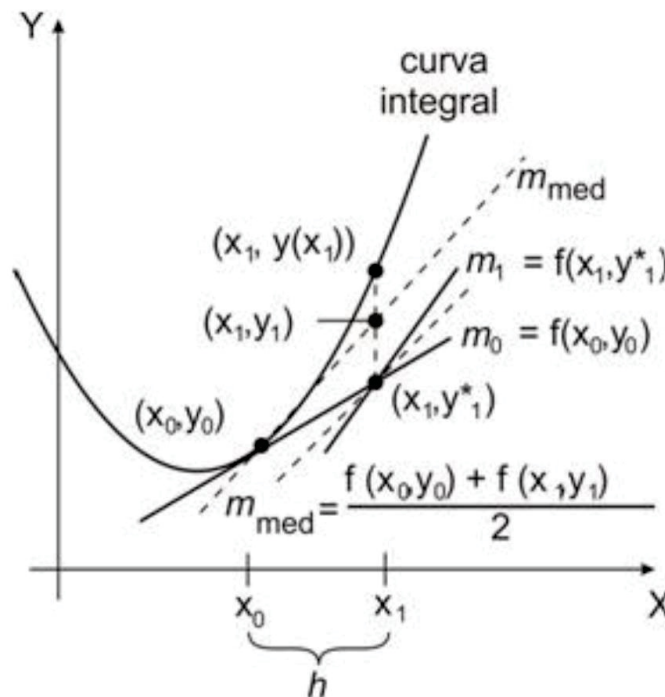


Figura 2.8 - Visualização gráfica do método de Euler melhorado, ou de Runge-Kutta de 2ª ordem (Valle (2012, p. 14))

2.7.3. Método de Runge-Kutta de 3ª ordem

Utilizando O método de Runge-Kutta de terceira ordem mais conhecido (tendo em vista o desenvolvimento anterior e escolhas de algumas constantes) é apresentado no sistema de equações (2.65) a seguir:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n + 2hk_2 - hk_1) \end{cases} \quad (2.65)$$

2.7.4. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Utilizando

De modo análogo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem mais conhecido é representado pela expressão (2.66):

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (2.66)$$

Observa-se na Figura 2.9 que o método faz uma média ponderada das declividades da função no intervalo.

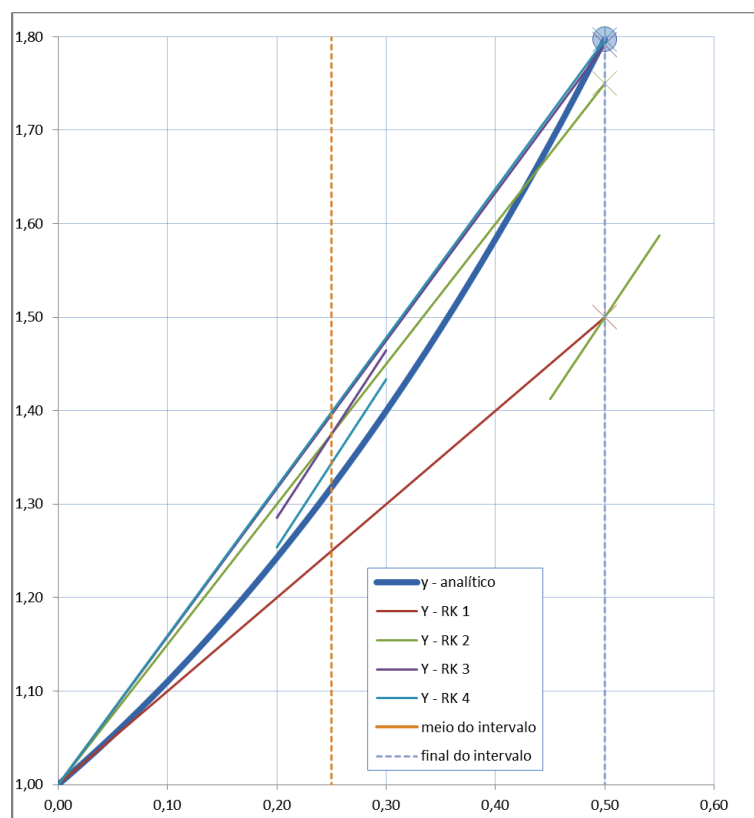


Figura 2.9 - Visualização gráfica comparativa dos métodos de Runge-Kutta de 1ª a 4ª ordem

2.8. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO (ENTRADAS, SAÍDAS, CONTORNOS “RÍGIDOS”)

As equações anteriores englobam apenas os elementos internos. As condições de contorno são aplicadas no método RKDG como fluxos nos contornos dos elementos fronteiros, de forma direta.

São condições de contorno usuais a vazão/fluxo, ou velocidade, na entrada e um nível de água na saída, para escoamentos fluviais, ou subcríticos. Em escoamentos torrenciais, ou supercríticos, as duas condições são aplicadas na entrada do canal. Internamente, o método consegue encontrar discontinuidades, que seriam condições de contornos internas móveis em alguns métodos de solução (do tipo ajuste do choque).

Outras condições de contorno usuais são paredes sólidas (onde fluxo não é permitido) e fronteiras abertas (por onde pode ocorrer fluxo).

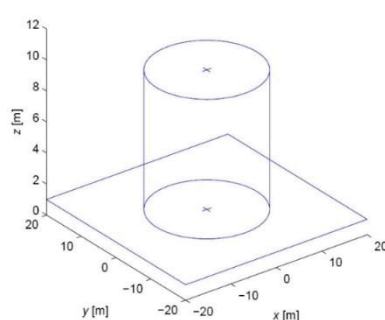
2.9. CASOS A SEREM ANALISADOS

2.9.1. Generalidades

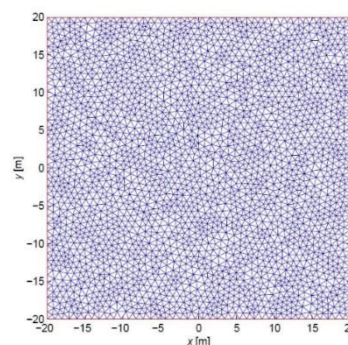
São revisados aqui os três casos a serem estudados nos capítulos seguintes, e o que será observado em cada caso.

2.9.2. Rompimento de barragem cilíndrica com nível de água a jusante baixo

Este caso é o “Testproblem 5” (designado de TP5) da tese de Schwanenberg (2003), onde é estudado o escoamento após 0,69 s do rompimento de um tanque cilíndrico com raio de 11 m, e profundidade interna de 10 m, em um tanque quadrado com 40 m de lado, e preenchido previamente com 1 m de profundidade de água; como condição inicial adicional, não existe fluxo em nenhuma região (todo o fluido está em repouso e as fronteiras são fechadas). A apresenta uma visão do caso a ser estudado (condições iniciais e malha adotada, com 5.422 elementos). Os resultados obtidos por Schwanenberg (2003) são apresentados na Figura 2.11 e na Figura 2.12. Este caso pode ser comparado com resultados semi-analíticos, segundo Toro (2001), apresentados também na Figura 2.12. Este caso também foi estudado com o Método dos Volumes Finitos por Tseng e Chu (2000) com o esquema TVD-MacCormack e por Gottardi e Venutelli (2004) com a utilização de um esquema TVD (Kurganov-Tadmor) e Runge-Kutta no tempo. A Figura 2.13 apresenta os resultados obtidos por estes autores. No item 4.2 serão apresentados estes resultados em confronto com o semi-analítico (a ser explicado naquele item).



a) Perfil inicial (pré-ruptura)



b) Malha adotada no plano (5.422 elementos)

Figura 2.10 – Condição inicial para o estudo do rompimento de uma barragem cilíndrica (Schwanenberg (2003, p. 111 e 112))

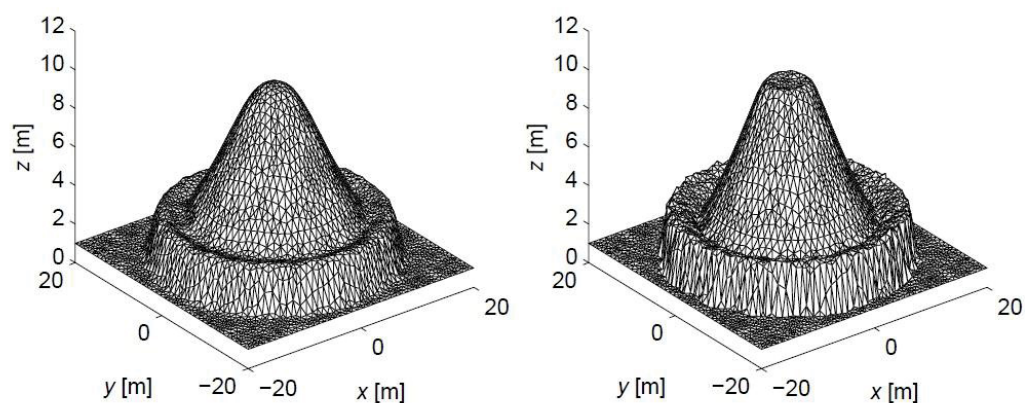


Figura 2.11 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica (Schwanenberg (2003, p. 112)) em 1ª e 2ª ordem de aproximação

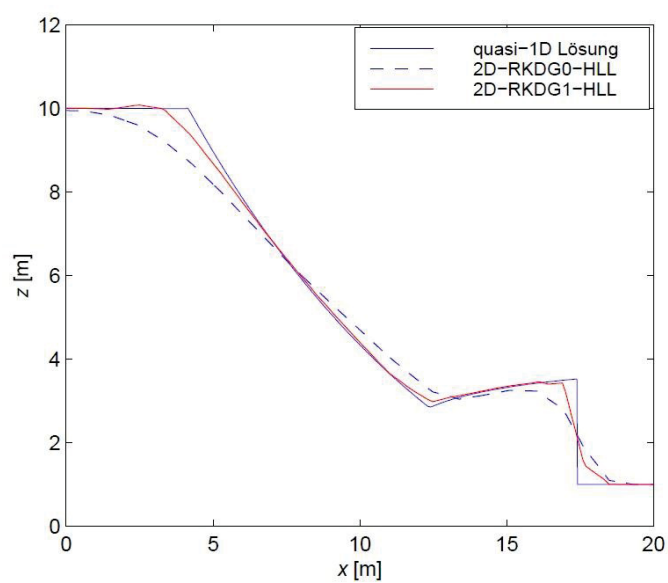
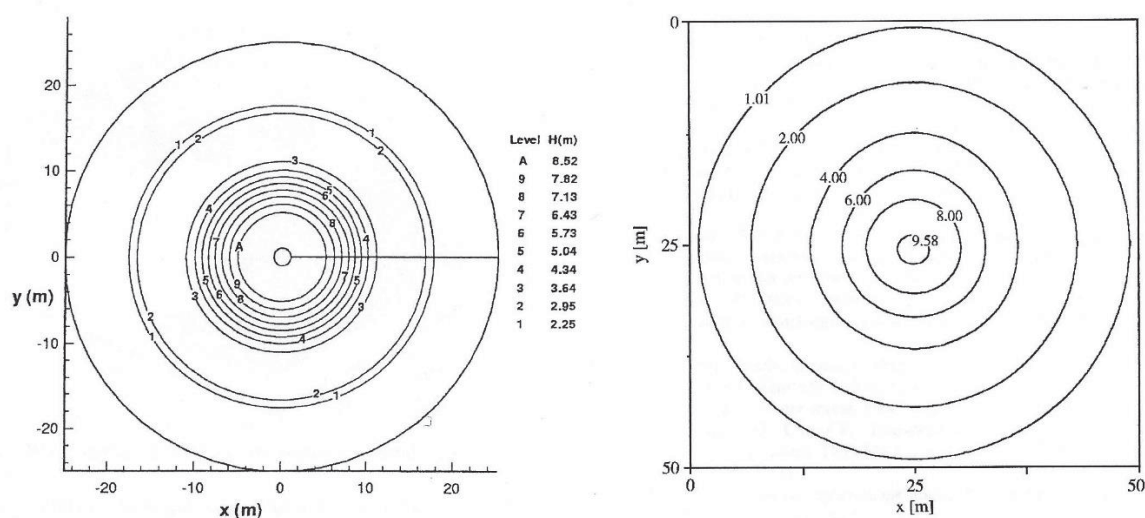


Figura 2.12 – Resultados de Schwanenberg (2003) – pg. 113 – em 1ª e 2ª ordem de aproximação (RKDG0 e RKDG1, respectivamente), comparados com os resultados semi-analíticos de Toro (2001)



a) Tseng e Chu (2000)

b) Gottardi e Venutelli (2004)

Figura 2.13 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica –resultados obtidos por Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004)

2.9.3. Rompimento de barragem cilíndrica com nível de água a jusante alto

Este exemplo está sendo criado para este trabalho, tendo em vista considerações de Pereira (1996) e Basco (1989), que indicam que a consideração de Boussinesq é relevante para rompimentos de barragens onde a profundidade a jusante da barragem é superior a 56% do nível a montante da barragem.

Desta forma, alterou-se o caso anterior para um nível de água inicial a jusante de 6 m, mantendo-se o nível de água interno da barragem em 10 m. Todos os dados serão apresentados no próximo capítulo. Foi utilizada a mesma malha do caso anterior, assim como as condições de contorno.

2.9.4. Contração em um escoamento supercrítico

Este exemplo foi estudado por Schwanenberg (2003) e por outros pesquisadores. O caso foi originalmente estudado por Ippen e Dawson (1951). Consiste na contração de um canal de dois pés de largura (0,6096 m) para um pé (0,3048 m) em 1,457 m de comprimento (ângulo de 6°). A vazão é permanente e igual a 0,0408 m³/s, com uma profundidade na entrada de 0,1 pé (0,03048 m). A declividade do canal é de 0,05664 m/m, e o coeficiente de rugosidade de Manning (n) é de 0,0107 m^{-1/3}.s. Este caso também foi estudado por Berger e Stockstill (1995).

As figuras Figura 2.14 a Figura 2.16 apresentam os resultados obtidos nos três trabalhos citados, por medição em laboratório, ou cálculo com Equações de Águas Rasas convencionais. Schwanenberg (2003) utilizou duas malhas; nesta pesquisa adotou-se a malha com 4.935 elementos, apresentada na Figura 2.17.

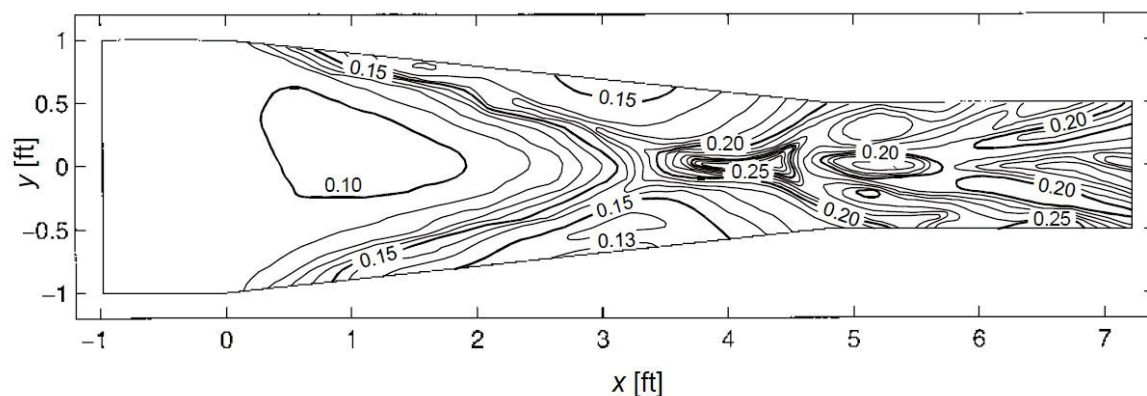


Figura 2.14 – Contração em um canal com escoamento supercrítico - resultados de Ippen e Dawson (1951)

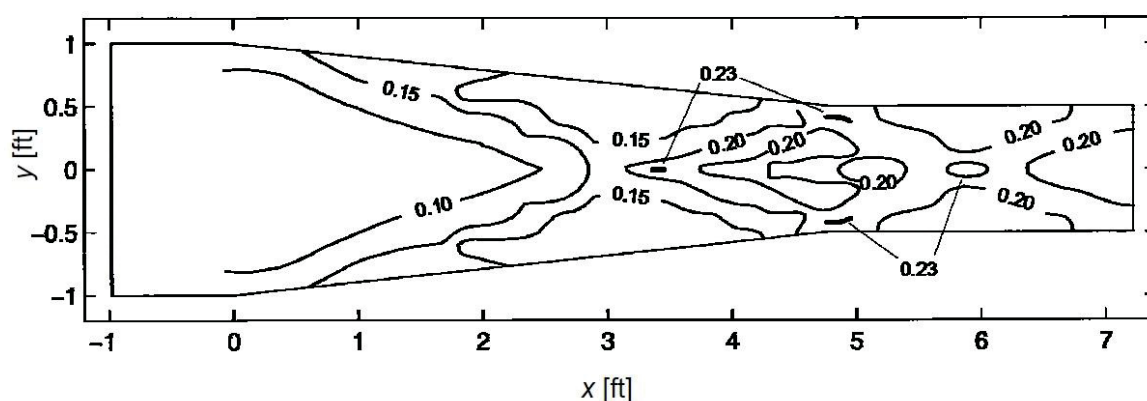


Figura 2.15 – Contração em um canal com escoamento supercrítico - resultados de Berger e Stockstill (1995)

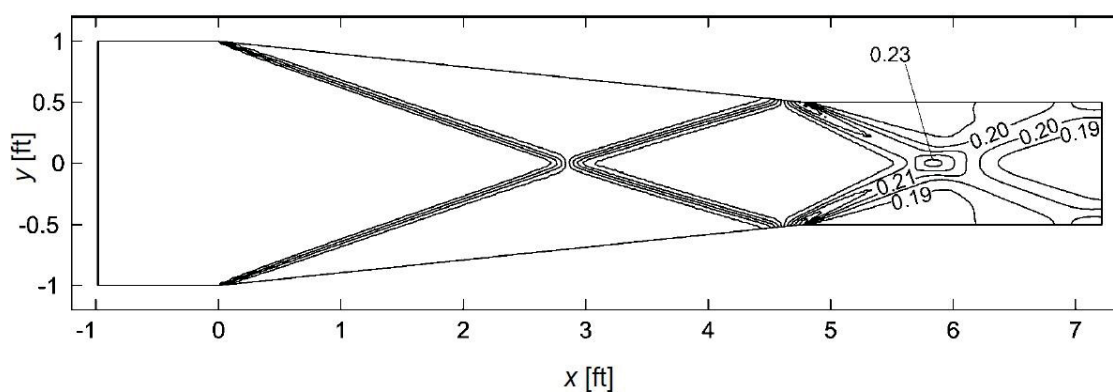


Figura 2.16 – Contração em um canal com escoamento supercrítico – resultados de Schwanenberg (2003) com 4935 elementos

As figuras Figura 2.14 a Figura 2.16 mostram os resultados como apresentados por seus autores, isto é, em unidades inglesas (comprimento em pés). No CAPÍTULO 4, quando da apresentação dos resultados deste trabalho, estes serão transformados em unidades inglesas, para comparação visual. Observa-se a formação de ondas de choque em todos os casos, com o aumento da profundidade do escoamento ao passar pelo estreitamento, e pico próximo ao final da contração.

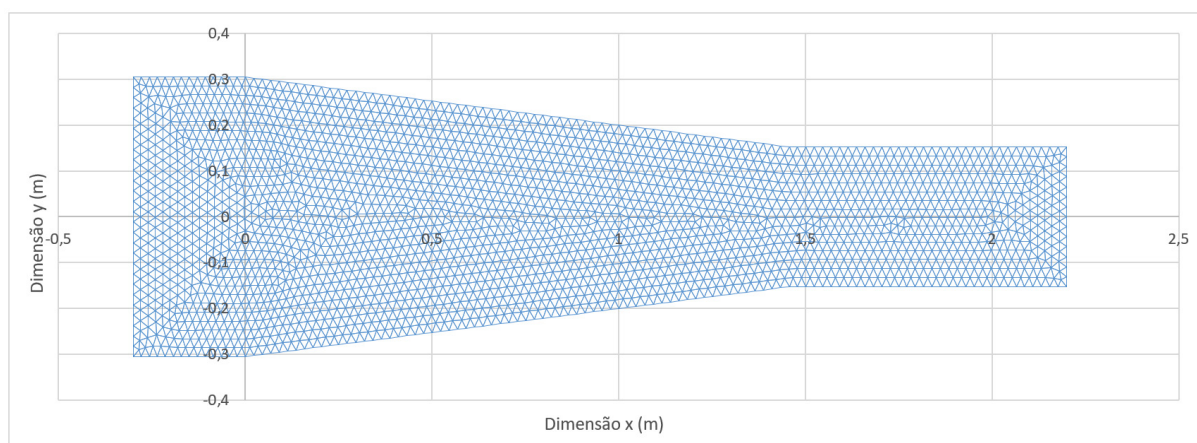


Figura 2.17 – Malha utilizada por Schwanenberg (2003) e neste estudo, com 4935 elementos

No próximo capítulo serão desenvolvidas as técnicas que serão aplicadas, baseadas na revisão bibliográfica realizada neste capítulo.

CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS

3.1. GENERALIDADES

Este capítulo apresenta as formulações adotadas para representar matematicamente o escoamento de fluido em canal em duas dimensões, levando em conta a distribuição não hidrostática de pressões na vertical.

São apresentados, ainda, os métodos aplicados na sua solução e implementação computacional.

3.2. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES

A dedução das equações de Boussinesq em duas dimensões segue, basicamente, o roteiro apresentado em Chaudhry (2008), citado no item 2.2.4 deste trabalho. Utiliza-se, ainda, as características do escoamento em duas dimensões, apresentado no item 2.2.2. Deste modo, pode-se expandir a hipótese de Boussinesq – qual seja, a existência de uma aceleração vertical provocada pela curvatura das linhas de corrente, causando uma distribuição não-hidrostática de pressões – para duas dimensões horizontais, criando um conjunto de equações com características assemelhadas às Equações de Águas Rasas, porém incluindo a nova distribuição de pressões. As variáveis do escoamento utilizadas na dedução a seguir são apresentadas na Figura 3.1, onde Δx e Δy são os intervalos espaciais, u e v são as velocidades, respectivamente nas direções x e y , e h é a profundidade do escoamento.

O Apêndice I deste trabalho apresenta uma dedução mais detalhada destas equações, a partir das equações de Saint-Venant, Águas Rasas e Boussinesq 1D. Esta dedução detalhada, apesar de ser ponto muito importante deste trabalho, foi deslocada para o apêndice a fim de não sobrecarregar o texto principal. Apresentam-se, no entanto, as equações fundamentais utilizadas nesta pesquisa, incluindo o efeito da velocidade vertical na pressão, como correção de Boussinesq para escoamentos em duas dimensões.

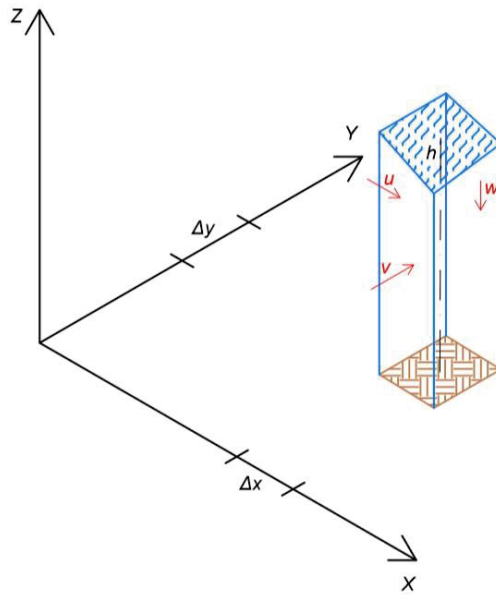


Figura 3.1 – Variáveis utilizadas na dedução das Equações de Boussinesq em duas dimensões.

3.2.1. Equação da Continuidade

A Equação da Continuidade escrita para o escoamento de um fluido incompressível em duas dimensões horizontais e uma dimensão vertical adicional (que será simplificada para um valor único de profundidade apenas) é expressa na Equação (3.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Com w sendo a componente do vetor velocidade (m/s) na direção z . Fazendo-se uma série de operações matemáticas, na ordem: multiplicando por dz ; integrando na profundidade h ; utilizando a regra de Leibniz (de derivação de integrais) e impondo as condições de contorno no fundo – onde ($z = 0$) resulta $w_b = 0$, pois $w = 0$ no fundo impermeável – e na superfície livre – onde ($z = z_s$) resulta $p_s = 0$ (pressão atmosférica) e, ainda, adotando-se fundo horizontal ($\frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{\partial z_b}{\partial y} = 0$), pode-se escrever que a velocidade vertical na superfície livre é dada pela Equação (3.2):

$$w_s = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.2)$$

Retornando à Equação (3.1), integrando novamente com a utilização da regra de Leibniz e, ainda, lembrando que $z_s = h$, obtém-se a Equação (3.3):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Que é idêntica à equação da Continuidade nas Equações de Águas Rasas, como esperado. Esta é a primeira das Equações de Boussinesq. Expandindo a Equação (3.3), e após alguns tratamentos matemáticos, pode-se escrever a velocidade vertical como mostrado na Equação (3.4):

$$w = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) z \quad (3.4)$$

3.2.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção z

A Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção z pode ser escrita como na Equação (3.5):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3.5)$$

sendo p a pressão do fluido no fundo (Pa) e ρ a densidade deste mesmo fluido (kg/m^3).

Desprezando-se a perda de carga no fluxo vertical, multiplicando a Equação (3.5) por z e rearranjando os termos resulta que o termo de pressão p/ρ pode ser escrito como na Equação (3.6):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial pz}{\partial z} + gz + \frac{\partial wz}{\partial t} + \frac{\partial(uzw)}{\partial x} + \frac{\partial(vzw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2 z)}{\partial z} - w^2 \quad (3.6)$$

Integrando a Equação (3.6) na direção vertical (z) obtém-se a Equação (3.7), a qual mostra que se a velocidade na direção z for nula ($w = 0$), a distribuição de pressões hidrostática é obtida diretamente, como apresentado na Equação (3.8), e utilizada nas Equações de Águas Rasas convencional.

$$\int_0^h \frac{p}{\rho} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h uwz dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h vwz dz + \frac{1}{2} gh^2 - \int_0^h w^2 dz \quad (3.7)$$

$$\int_0^h \frac{p}{\rho} dz = \frac{1}{2} gh^2 \quad (3.8)$$

3.2.3. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção \underline{x}

A Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção \underline{x} pode ser escrita como mostrado na Equação (3.9):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + gS_{0x} - gS_{fx} \quad (3.9)$$

Onde o termo (gS_{0x}) representa a componente da força peso na direção do movimento e (gS_{fx}) representa por sua vez a perda de carga na direção (fruto da viscosidade do fluido e da rugosidade do contorno). Integrando a Equação (3.1) segundo a vertical e após algumas operações matemáticas obtém-se a Equação (3.10):

$$\left[\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz \right] = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.10)$$

Retornando à Equação (3.6) e integrando-a na profundidade, obtém-se a Equação (3.11):

$$\int_0^h \frac{p}{\rho} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (wuz) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (wvz) dz + \frac{1}{2} gh^2 - \int_0^h w^2 dz \quad (3.11)$$

A Equação (3.12) resulta da aplicação da regra de Leibniz na Equação (3.10), após reordenamento de termos:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz - \left(\frac{p}{\rho} \right)_s \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.12)$$

Lembrando que $\left(\frac{p}{\rho} \right)_s = 0$ (pressão atmosférica na superfície) e que $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$ (horizontal), e com a substituição da Equação (3.11) na Equação (3.12), obtém-se a Equação (3.13):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} \\
& + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h w u z dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h w v z dz - \int_0^h w^2 dz \right]}_{\text{parcela referente à influência da velocidade vertical}} = g h (S_{0_x} - S_{f_x})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

O último termo do primeiro membro da Equação (3.13) – em destaque – resulta de uma soma de quatro parcelas, discretizadas individualmente nas Equações (3.14) a (3.17).

Focando nesse quarto e último termo (entre colchetes), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h w z dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] z^2 dz = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{h^3}{3} \right] \\
&= - \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h^2 \frac{\partial h}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h w u z dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] z^2 u dz = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) u \frac{h^3}{3} \right] \\
&= - \left[u \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h^2 u \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h w v z dz = - \left[v \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h^2 v \frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \tag{3.16}$$

$$\int_0^h w^2 dz = \int_0^h \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]^2 z^2 dz = \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{3.17}$$

A soma dessas parcelas contém a equação da continuidade, e que pode ser simplificada (por ser igual a zero), assumindo finalmente a forma da Equação (3.18). A Equação (3.13) com a substituição do quarto termo pela Equação (3.18) é a segunda equação de Boussinesq.

...

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \right. \right. \quad (3.18)$$

$$\left. \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right\}$$

3.2.4. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção y

A equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção y pode ser escrita como na Equação (3.19):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + gS_{0y} - gS_{fy} \quad (3.19)$$

Onde todos os termos já foram definidos anteriormente (com a troca da direção das declividades do fundo e da linha de energia, em relação à Equação (3.9)). Pelos mesmos passos descritos no item 3.2.3, e lembrando que na direção y temos a troca do vetor velocidade u pelo vetor v , e as direções x por y , a correção do último termo resulta como escrito na Equação (3.20).

...

$$= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \right. \right. \quad (3.20)$$

$$\left. \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right\}$$

Que é similar à Equação (3.18) com a troca da derivada mais externa. Resulta, dessa forma, a terceira equação de Boussinesq.

3.2.5. Forma final das equações de Boussinesq em duas dimensões horizontais

As equações (3.3) e (3.18) – modificada a partir da equação (3.13) – assim como a dedução da equação omitida neste texto – na direção y , e que resulta em tudo semelhante à equação (3.13) – e que pode ser escrita na forma da Equação (3.20), permite escrever as três

equações de Boussinesq, em coordenadas cartesianas, no plano horizontal. Elas têm a forma da Equação (3.21):

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + g \frac{h^2}{2} - B \right\} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(vuh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v^2 h + g \frac{h^2}{2} - B \right\} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (3.21)$$

Onde B representa o termo de correção de Boussinesq, que é escrito como mostrado na Equação (3.22):

$$B = \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.22)$$

E ainda as declividades de fundo e da superfície de energia em cada direção podem ser calculadas pelas equações (3.23) a (3.26) a seguir, onde é adotada a equação de Manning para a perda de carga:

$$S_{0x} = tg\theta_x \cong sen\theta_x \quad (3.23)$$

$$S_{0y} = tg\theta_y \cong sen\theta_y \quad (3.24)$$

$$S_{fx} = \frac{|V|un^2}{h^{4/3}}; e \quad (3.25)$$

$$S_{fy} = \frac{|V|vn^2}{h^{4/3}}. \quad (3.26)$$

Onde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, como comentado anteriormente.

3.3. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO E RUNGE-KUTTA ÀS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Para solucionar o sistema de equações apresentado anteriormente (equações (3.21) e (3.22)), quaisquer que sejam as simplificações adotadas, é necessária a adoção de um método de solução para resolver as aproximações no espaço e no tempo. Vimos no CAPÍTULO 2 que os métodos são diferentes para cada dimensão (espacial ou temporal). Neste trabalho seguiremos os métodos propostos por Schwanenberg (2003): o Método dos Elementos Finitos

(Galerkin Descontínuo) no espaço e o Método de Runge-Kutta no tempo. O conjunto dos métodos é abreviado por RKDG nas bibliografias referentes ao tema. O Método de Galerkin Descontínuo é um método de Elementos Finitos do tipo Galerkin, descrito no item 2.6.5.

O Método de Runge-Kutta mais utilizado é o de 4ª ordem, mas para a solução das equações de águas rasas Schwanenberg (2003) utiliza também os métodos de ordens inferiores, tendo em vista as fortes restrições de avanço no tempo ligadas ao método. Neste trabalho será utilizado o método de 2ª ordem.

Como o método de Runge-Kutta é um método de solução explícito no tempo, ele deve respeitar a condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) – ver mais detalhes em Cockburn e Shu (2001) – de forma cada vez mais restritiva quanto maior a ordem do método utilizado. A condição CFL representa a relação entre a velocidade do escoamento e uma velocidade fictícia, ou numérica, relacionando os passos de tempo e de espaço. Desta forma, a equação (3.27) representa este valor de controle que deve sempre ser menor do que a unidade para esquemas explícitos, de maneira geral. Dependendo do método utilizado, e/ou de sua ordem, ele pode ser mais restritivo ainda.

$$CFL = \frac{V_{m\acute{a}x}}{\min\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)} < 1,0 \quad (3.27)$$

No caso dos métodos de Runge-Kutta, a limitação é muito forte, sendo fornecida pela equação (3.28) – citada por Cockburn e Shu (2001), para problemas unidimensionais:

$$CFL = \frac{1}{2k - 1} \quad (3.28)$$

Onde $(2k - 1)$ representa a ordem do polinômio máximo ajustado por um método de ordem k . Schwanenberg (2003) recomenda a utilização de um CFL de 90% do máximo, a fim de evitar problemas de instabilidade e convergência caso fosse utilizado o valor máximo permitido. A Tabela 3.1 apresenta estes valores para uma dimensão, enquanto a Tabela 3.2 apresenta estes valores para escoamentos em duas dimensões.

Esta limitação pode ser forte para escoamentos tranquilos, mas não o é para escoamentos com fortes gradientes, onde os passos de tempo e de espaço devem ser necessariamente pequenos para conseguir reproduzir convenientemente o fenômeno.

TABELA 3.1 – VALORES MÁXIMOS E RECOMENDADOS PARA O CONTROLE CFL EM UMA DIMENSÃO

Ordem do Runge-Kutta	CFL máximo	CFL recomendado
1 ^a	1,00	0,90
2 ^a	0,33	0,30
3 ^a	0,20	0,18
4 ^a	0,14	0,13

TABELA 3.2 – VALORES MÁXIMOS E RECOMENDADOS PARA O CONTROLE CFL EM DUAS DIMENSÕES

Ordem do Runge-Kutta	CFL recomendado
1 ^a	0,90
2 ^a	0,50
3 ^a	0,35
4 ^a	Sem referências localizadas

O método RKDG é desenvolvido a partir do método de Galerkin clássico para discretização espacial. A particularidade do método reside no mapeamento das descontinuidades das variáveis nas fronteiras do elemento. No método clássico, as variáveis nas fronteiras são representadas por apenas um valor, com uma transição contínua sobre as fronteiras do elemento. Já o método de Galerkin Descontínuo (DG) aproxima a variável na fronteira com um valor por elemento (Figura 3.2). Se estes valores não forem iguais nos elementos, as descontinuidades podem ser mapeadas para as variáveis, através de valores diferentes em cada elemento, ou valores médios e inclinações diferentes em cada elemento.

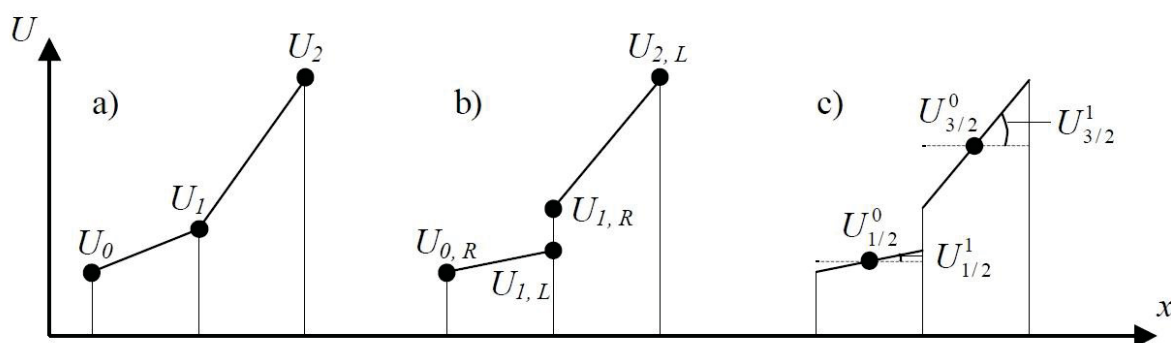


Figura 3.2 – a) Discretização espacial contínua (esquerda); b) discretização espacial nodal descontínua (centro); c) Discretização descontínua modal (direita)

O método RKDG pode ser resumido da seguinte forma:

1. A Discretização de Galerkin Descontínuo espacial com funções de base de polinômio grau k transforma a equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias.
2. O sistema de equações diferenciais ordinárias é integrado no tempo, com um método TVD Runge-Kutta de ordem $k + 1$.
3. Em caso de problemas puramente hiperbólicos um limitador de inclinação tipo TVD é aplicado a cada passo intermediário do método de Runge-Kutta. Isto garante a estabilidade de frentes de choque. A aplicação do limitador de inclinação pode ser dispensada no caso da inclusão do termo de viscosidade nas equações – como mostrado nas equações (2.52) e (2.53).

Como visto no item 2.6.5, o método de Galerkin Descontínuo necessita de controle do fluxo nas fronteiras, a fim de controlar a estabilidade e convergência do resultado. Existem diversos métodos de controle que podem ser utilizados. Cockburn e Shu (2001) orientam a utilização do método de Godunov para problemas não lineares. Em segundo lugar, orientam a utilização do método de Lax-Friedrichs Local, mas este apresenta a desvantagem da criação de uma maior viscosidade artificial na solução. Comentam, ainda, que os resultados obtidos e a aplicabilidade dos métodos são semelhantes. Schwanenberg (2003), em sua modelagem, utilizou diversos métodos – Godunov, Lax-Friedrichs, HLL (Harter-Lax-van Leer) e Roe. Concluiu que quanto mais alta a ordem da discretização, e quanto mais refinada a malha adotada, menor a influência do limitador no resultado. Usaremos neste trabalho o limitador de

HLL, que se encontra na maioria dos resultados apresentados por Schwanenberg (2003) e que serão utilizados para confronto de resultados obtidos.

3.4. ADAPTAÇÃO DO MÉTODO PARA LEVAR EM CONTA A HIPÓTESE DE BOUSSINESQ

Os trabalhos apresentados por Basco (1989), Pereira (1996) e Mohapatra e Chaudhry (2004) demonstram que a correção de Boussinesq é pequena frente às outras parcelas das equações. Desta forma, a sua consideração pode ser feita como um termo fonte adicional.

Desta forma, a adaptação das equações de Boussinesq em uma ou duas dimensões pode ser realizada por adição de um termo às equações anteriormente apresentadas, como descrito a seguir.

As equações de Boussinesq em uma dimensão podem ser escritas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right\}}_{\text{Saint-Venant Clássico}} = gh(S_0 - S_f) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \{B\}}_{\text{Correção de Boussinesq}} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Onde:

$$B = \left\{ \frac{h^3}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.30)$$

Ou em duas dimensões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \{uvh\}}_{\text{Equação de Águas Rasas Clássica}} = gh(S_{0x} - S_{fx}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \{B\}}_{\text{Correção de Boussinesq}} \\ \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x} \{uvh\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right\} = gh(S_{0y} - S_{fy}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \{B\}}_{\text{Correção de Boussinesq}} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Na equação (3.31), os termos $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \dots + \frac{1}{2} g h^2 \right\}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \dots + \frac{1}{2} g h^2 \right\}$ representam a influência da pressão hidrostática no escoamento. O termo de correção para distribuição não-hidrostática de pressões é dado por $\frac{\partial}{\partial x} \{B\}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \{B\}$, onde $\{B\}$ é calculado pela equação (3.32).

$$B = \left\{ \frac{h^3}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.32)$$

Vemos que teremos derivadas terceiras no tempo e no espaço, tendo em vista que o termo corretor B ainda é derivado nas direções espaciais (ver equações (3.29) e (3.31)), além das derivadas segundas que aparecem explícitas nas equações (3.30) e (3.32).

3.4.1. Discretização dos termos de correção de Boussinesq em duas dimensões

A discretização dos termos de Boussinesq em duas dimensões exige que se possa obter derivadas de 1º grau no tempo e de 2º grau nas direções espaciais. Desta forma optou-se por analisar o método de discretização a partir dos elementos utilizados em duas dimensões: elementos triangulares sem maiores restrições.

Desta forma, e lembrando que para se obter uma aproximação de 2º grau no espaço são necessários no mínimo quatro pontos conhecidos, ficaremos com o elemento em análise e seus três vizinhos (com os quais o elemento compartilha um lado/aresta). A Equação (3.33) mostra que a equação quadrática necessita de seis parâmetros para ser definida. Desta forma, precisamos de seis ou mais pontos para ter um sistema possível para aplicação do método de mínimos quadrados (número de pontos igual ou superior ao número de coeficientes a determinar); os quatro pontos inicialmente selecionados não permitiram a determinação dos parâmetros. Desta forma, utilizaremos, adicionalmente, os elementos vizinhos aos vizinhos (chamados de circunvizinhos), em um acréscimo de seis pontos, conduzindo a um total de 10 pontos para a análise.

Desses dez elementos, conhecemos:

- Suas características geométricas (pontos formadores do triângulo, dimensões dos lados, posição do centroide e pontos de integração de Gauss);
- Na iteração anterior (tempo já conhecido): profundidade (h) e fluxos ($u.h$ e $v.h$), podendo-se obter diretamente as velocidades (u e v) pela divisão dos fluxos pela profundidade do escoamento; e

- No passo de tempo que estamos dando em direção ao futuro ($t+\Delta t$) temos uma primeira aproximação para os valores de profundidade (h^f) e fluxos ($(u.h)^f$ e $(v.h)^f$) – onde o superíndice f indica a variável no tempo futuro, podendo-se obter diretamente as velocidades (u^f e v^f). Esta aproximação vem da aplicação das equações de águas rasas originais, sem o termo de correção de Boussinesq.

A Figura 3.3 apresenta uma representação esquemática do elemento genérico e seus vizinhos e circunvizinhos, com uma função representada em seu centroide. As discretizações a seguir se baseiam nesta figura, onde φ representa a função válida em cada caso ($u, v, h, \frac{du}{dx}$, etc...).

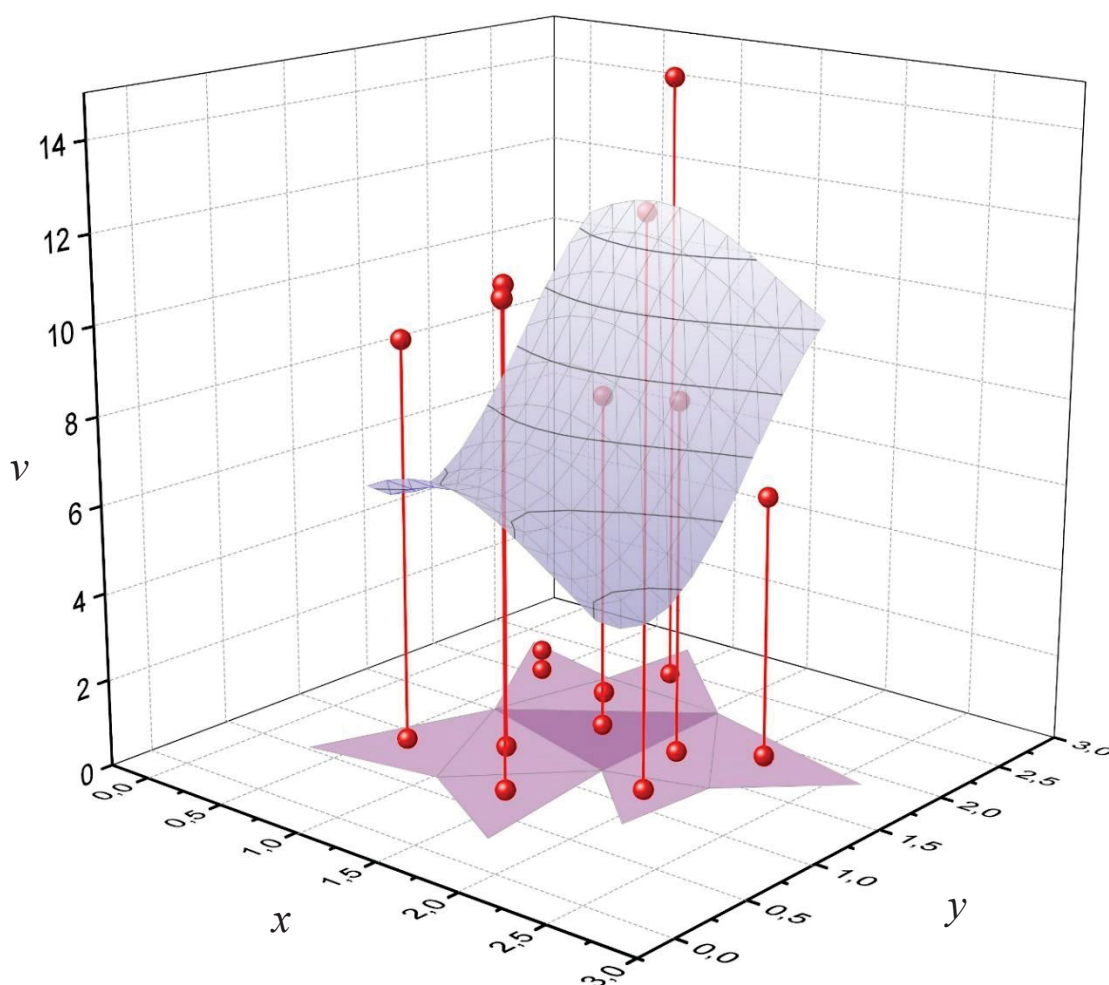
Baseado na descrição genérica da Figura 3.3, podemos escrever uma função genérica (φ) na forma da Equação (3.33), que é a forma geral de uma superfície quadrática no espaço:

$$\varphi = a + b.x + c.y + d.x.y + e.x^2 + f.y^2 \quad (3.33)$$

Neste equacionamento, os coeficientes a a f são determinados para cada função, em cada elemento, enquanto x e y são as coordenadas de cada ponto dentro do “domínio da função” (elemento e seus vizinhos). Como temos dez pontos e seis coeficientes a determinar, podemos utilizar um método numérico para determina-los; o método adotado foi o Método dos Mínimos Quadrados, a ser descrito no item seguinte (3.4.2).

As correções de Boussinesq, apresentados nas equações (3.31) e (3.32) podem ser escritas em três parcelas básicas, como mostrado na Equação (3.34) a seguir:

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 + B_3 \\ &= \underbrace{\left\{ \frac{h^3}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \right] \right\}}_{B_1} + \underbrace{\left\{ \frac{h^3}{3} \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \right\}}_{B_2} \\ &\quad - \underbrace{\left\{ \frac{h^3}{3} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}}_{B_3} \end{aligned} \quad (3.34)$$



v : velocidade (m/s) na direção y , tomada com exemplo no elemento 2 da aplicação 1 deste trabalho

Figura 3.3 – Elemento genérico (central), seus vizinhos e circunvizinhos utilizados para desenvolver as discretizações dos termos de correção de Boussinesq em duas dimensões.

Podemos observar desta equação que necessitamos, em cada elemento, aproximações para as variáveis u, v e h , suas derivadas $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x, \partial v / \partial y, \partial^2 u / \partial x^2, \partial^2 u / \partial x \partial y, \partial^2 u / \partial y^2, \partial^2 v / \partial x^2, \partial^2 v / \partial x \partial y, \partial^2 v / \partial y^2$ e das derivadas cruzadas no tempo e no espaço $\partial^2 u / \partial x \partial t$ e $\partial^2 v / \partial y \partial t$.

Tendo a Equação (3.33) em vista, podemos escrever as derivadas como mostrado nas Equações (3.35) a (3.44):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b_u + d_u y + 2e_u x \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = c_u + d_u x + 2f_u y \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b_v + d_v y + 2e_v x \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = c_v + d_v x + 2f_v y \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e_u \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = d_u \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f_u \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2e_v \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = d_v \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2f_v \quad (3.44)$$

As derivadas cruzadas podem ser calculadas como a variação no tempo da derivada espacial ou pela variação espacial da derivada temporal. Utilizando a primeira definição, teremos as aproximações das velocidades futuras calculadas pelas Equações (3.35) e (3.38). Desta forma teremos uma equação para a velocidade no tempo conhecido e outra para o tempo futuro (e suas derivadas espaciais), sendo a derivada cruzada temporal calculada pelas Equações (3.45) e (3.46).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\Delta t} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_f - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\Delta t} \quad (3.46)$$

Em todos os termos, o valor da parcela $(h^3/3)$ é calculado, pois o valor da profundidade em cada ponto é conhecido (é utilizado o tempo conhecido).

As Equações (3.45) e (3.46) permitem escrever o termo B_1 .

As Equações (3.39) a (3.44) permitem escrever o termo B_2 . Neste termo, precisamos em cada centroide do valor das velocidades u e v .

Finalmente, as Equações (3.35) e (3.38) permitem escrever o termo B_3 .

As equações citadas são diferentes para cada variável abordada, mas todas se baseiam no Método dos Mínimos Quadrados, com os valores dos coeficientes determinados para cada variável e elemento da malha.

3.4.2. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para determinação dos coeficientes de discretização das equações de correção de Boussinesq

A Equação (3.33) apresenta a equação de uma superfície polinomial quadrática no espaço. A sua solução precisa do conhecimento dos seus seis coeficientes. Como estamos utilizando 10 pontos (o centroide do elemento em análise, os centroides dos seus três elementos vizinhos e dos seis circunvizinhos), precisamos encontrar os coeficientes através de cálculo numérico.

O Método dos Mínimos Quadrados se baseia em minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor realmente observado e o estimado pela equação de ajuste adotada. Isto é realizado montando-se um sistema de equações, onde os termos da equação (a a f) são as incógnitas e os coeficientes da matriz são os diversos somatórios dos produtos das coordenadas e funções. A equação matricial tem a forma da equação (3.47):

$$[A] \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (3.47)$$

Com os seguintes vetores e matriz (Equações (3.48) a (3.50)):

$$[A] = \begin{bmatrix} n & \sum x & \sum y & \sum xy & \sum x^2 & \sum y^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy & \sum x^2 y & \sum x^3 & \sum xy^2 \\ \sum y & \sum xy & \sum y^2 & \sum xy^2 & \sum x^2 y & \sum y^3 \\ \sum xy & \sum x^2 y & \sum xy^2 & \sum x^2 y^2 & \sum x^3 y & \sum xy^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^2 y & \sum x^3 y & \sum x^4 & \sum x^2 y^2 \\ \sum y^2 & \sum xy^2 & \sum y^3 & \sum xy^3 & \sum x^2 y^2 & \sum y^4 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum \varphi \\ \sum \varphi x \\ \sum \varphi y \\ \sum \varphi xy \\ \sum \varphi x^2 \\ \sum \varphi y^2 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

A solução desta equação matricial é realizada através da matriz inversa, na forma da Equação (3.51), obtendo valores dos coeficientes diferentes para cada incógnita (u e v , por exemplo), porém com a matriz inversa definida por elemento, e uma multiplicação de matriz por incógnita.

$$\vec{x} = [A]^{-1} \cdot \vec{b} \quad (3.51)$$

A matriz inversa para cada elemento é calculada e armazenada no início da simulação, uma vez que depende exclusivamente dos valores das coordenadas dos pontos – e da função de aproximação utilizada. A multiplicação de matrizes para obtenção dos coeficientes é realizada a cada iteração e para cada variável.

Ao final dos cálculos das parcelas B_1 , B_2 e B_3 , a soma das parcelas que importam no caso em análise (podemos analisar cada parcela, ou o conjunto) é determinada e a sua derivada espacial calculada pelo método de RKDG, como as demais derivadas espaciais da equação (3.31).

3.4.3. Alteração da Função de Aproximação do Método dos Mínimos Quadrados

A aproximação acima descrita foi implementada e ensaiada, mas não conduziu a resultados satisfatórios, devido à não convergência dos resultados. Tal fato é decorrente da utilização de polinômios em funções com fortes gradientes, o que conduz a derivadas de valores elevados, o que causa instabilidades na simulação.

Optou-se por utilizar uma nova função de aproximação, na forma de uma série de Fourier. Esta função tem a característica de permitir a representação de fortes gradientes e ser continuamente derivável. Como temos duas dimensões, a função toma a forma da equação (3.52), onde se considera duas funções em seno e em cosseno em cada direção.

$$\varphi = a_0 + \sum_{m=1}^2 \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) + c_m \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) + d_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \right] \quad (3.52)$$

Neste equacionamento, temos 9 incógnitas (a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , d_1 e d_2). Os valores de L_x e L_y são a periodicidade da função, neste caso assumida como a amplitude das coordenadas dos elementos utilizados para o cálculo em cada elemento.

Esta formulação não será detalhada aqui, muito embora tenha sido implementada na presente pesquisa. Os resultados obtidos foram melhores do que os apresentados no caso da aproximação das funções por polinômios, mas apresentou problemas de instabilidade em alguns elementos. Tais problemas observados decorrem da utilização de um máximo de dez elementos para calcular as nove incógnitas, permitindo ainda um grau de liberdade para o método. Mas em alguns elementos, a geometria adotada na geração de malha pode resultar em menos elementos disponíveis, pois dois elementos vizinhos ao elemento de cálculo podem apresentar o mesmo circunvizinho, como mostrado na Figura 3.4, onde restam apenas 8 elementos para determinar 9 variáveis, o que conduz a um sistema matematicamente indeterminado.

Para solucionar esse problema, a série de Fourier foi simplificada para apenas um harmônico, o que conduz à equação (3.53), onde temos cinco variáveis com um mínimo possível de sete pontos de cálculo; na maioria dos elementos temos os 10 pontos convencionais, o que garante no mínimo dois graus de liberdade para o método.

$$\varphi = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + a_3 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + a_4 \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (3.53)$$

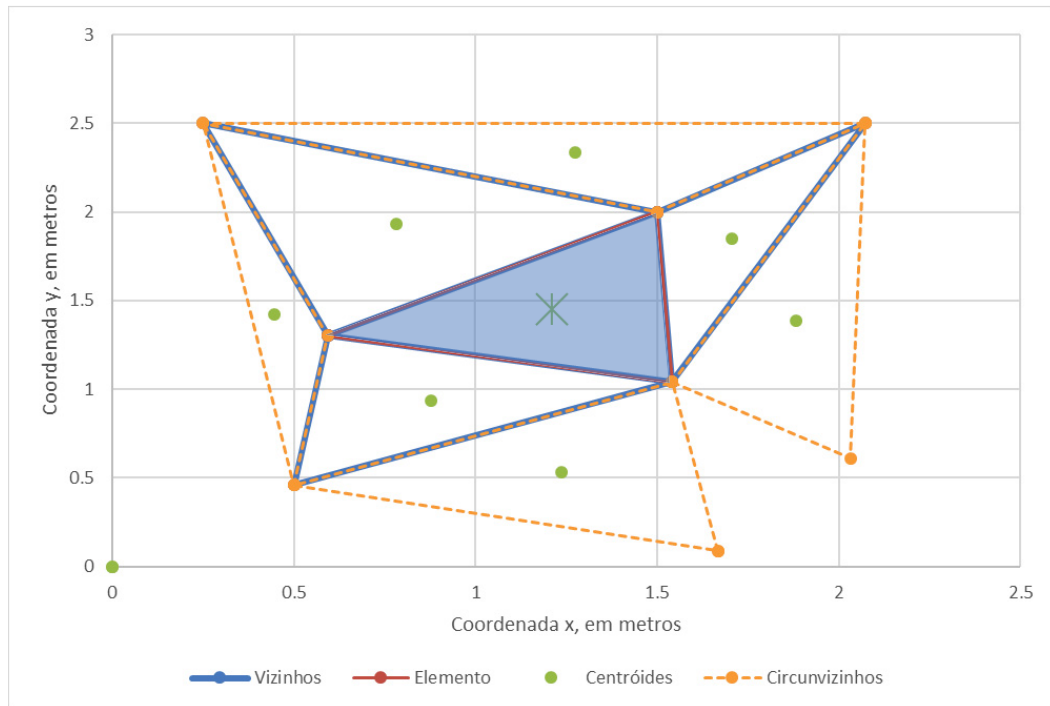


Figura 3.4 – Arranjo geométrico hipotético identificando uma indeterminação para o Método dos Mínimos Quadrados

Outra solução possível para este caso, mas não adotada, seria aumentar ainda mais o número de elementos para a aplicação do método. No entanto, este procedimento aumentaria em muito a área de abrangência, e tenderia a suavizar a solução em um espaço maior. O método é aplicado para calcular as derivadas no ponto do elemento central.

Para aplicação do Método dos Mínimos Quadrados monta-se um sistema de equações, onde os termos da equação (3.53) – a_0 a a_4 – são as incógnitas e os coeficientes da matriz são os diversos somatórios dos produtos das coordenadas e funções. A equação matricial tem a forma da equação (3.47). A matriz dos coeficientes e o vetor independente são apresentados nas Equações (3.54) a (3.56).

$$[A] = \begin{bmatrix} n & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \cos^2\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \sin^2\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \sum \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \cos^2\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \sum \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) & \sum \sin^2\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum \varphi \\ \sum \varphi \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \\ \sum \varphi \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \\ \sum \varphi \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \sum \varphi \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

A partir dos coeficientes definidos pela inversão da matriz apresentada na equação (3.54), e resolvendo a equação (3.51) com o vetor dos termos independentes dado pela equação (3.56), onde φ representa os vetores velocidade u e v , nos tempos anterior ou futuro (de cálculo). Com os coeficientes determinados para cada variável, as derivadas podem ser calculadas pelas equações (3.57) a (3.61).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\pi}{L_x} a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + \frac{\pi}{L_x} a_2 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\pi}{L_y} a_3 \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + \frac{\pi}{L_y} a_4 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) - \left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 a_2 \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 a_3 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) - \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 a_4 \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (3.61)$$

Com estas derivadas determinadas, podemos calcular os termos da parcela de correção de Boussinesq (equação (3.34)) e aplicar esta correção na equação (3.31), usando o método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo (descrito no item 2.6.5).

Na proximidade dos contornos físicos da malha estudada, a correção de Boussinesq não foi calculada, tendo em vista ser necessário um número significativo de elementos em volta do elemento em análise, a fim de calcular a aproximação por elementos finitos. Esta escolha é realizada a partir dos elementos vizinhos; se um deles não existir (significando que estaria fora do domínio), o cálculo não é realizado. Tal característica de cálculo não interfere no resultado, uma vez que os contornos são escolhidos afastados das regiões de fortes declividades, onde o termo de Boussinesq é relevante.

3.4.4. Verificação da estabilidade do método proposto às correções aos termos fonte

Para implementar as alterações descritas acima, adotou-se o modelo DGFLOW, desenvolvido por Dirk Schwanenberg em seu doutoramento (Schwanenberg, 2003) e disponibilizado para este trabalho.

Utilizando-se o caso de rompimento de barragem cilíndrica, descrito no item 2.9.2, foram realizados testes de estabilidade com o programa, alterando a declividade do fundo – em forma cônica e em rampa com declividade única – a rugosidade do fundo e incluindo variações adicionais às correções que são geradas pelas Equações de Águas Rasas convencionais.

O programa mostrou-se estável, admitindo variações percentuais de correção constante superiores a 10% da correção calculada pelas Equações de Águas Rasas, e mesmo de valores fixos (da ordem de 1/3). Essa análise mostra que o programa pode ser utilizado, uma vez que os valores esperados para a correção de Boussinesq são inferiores a 10%, conforme apresentado por Mohapatra e Chaudhry (2004) para escoamento unidimensional.

No próximo capítulo as técnicas aqui desenvolvidas serão aplicadas aos casos de estudo, apresentados no final do CAPÍTULO 2.

CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ

4.1. GENERALIDADES

Este capítulo contém os resultados obtidos para a modelagem em duas dimensões utilizadas para verificar a correção de Boussinesq.

O programa com correção de Boussinesq em duas dimensões partiu do modelo de Schwanenberg (2003), com a inclusão das rotinas necessárias para o cálculo dos coeficientes e sua aplicação. O núcleo do código-fonte, assim como arquivos de entrada de dados e forma dos arquivos de saída dos resultados foram mantidos, o que permite a comparação direta dos resultados obtidos. Foi adotado o Método de Runge-Kutta de 2ª ordem para o avanço no tempo, pois este método mostrou-se preciso o suficiente nos estudos de Schwanenberg (2003). Ordens superiores gerariam um grande esforço computacional, tendo em vista o volume de determinações necessárias e, principalmente, a restrição do passo de tempo pela condição de CFL mais restritiva.

Espera-se um grande crescimento no tempo de computação, em função da inversão de matrizes, que é um algoritmo custoso computacionalmente, e que deve ser realizado com matrizes de 5ª ordem, para cada um dos elementos do domínio (facilmente da ordem de milhares de elementos). Além disso, são criadas quatro multiplicações de matrizes para cada iteração, além dos cálculos necessários para o ajuste dos equacionamentos.

A consideração da não hidrostaticidade foi introduzida na modelagem a partir da consideração das derivadas das velocidades, calculadas a partir de uma superfície criada para cada elemento, para cada componente da velocidade e para os tempos conhecido e de cálculo, como descrito pela interpolação da Série de Fourier no item 3.4.3 descrito anteriormente. Foi introduzido um limitador adicional para este cálculo, adotando-se como limite o valor máximo apresentado por Basco (1989), de 10% da variação calculada pelas Equações de Águas Rasas. Uma limitação adicional é necessária neste caso, pois ao se tratar de derivadas em escoamento com fortes descontinuidades, facilmente o valor desta derivada pode atingir valores excessivamente elevados, o que levaria o modelo a instabilidades numéricas e a não convergência.

4.2. ROMPIMENTO DE BARRAGEM CILÍNDRICA

Este caso foi descrito no item 2.9.2 deste trabalho. Lá são mostrados os resultados obtidos por Schwanenberg (2003), e as condições de simulação com a utilização das Equações de Águas Rasas. O tempo de simulação final, 0,69 s, foi adotado em função deste tempo ser referenciado em diversos trabalhos, tendo em vista que a onda está praticamente atingindo os limites do domínio computacional adotado.

A Figura 4.1 apresenta a evolução no tempo da frente de onda. Observa-se que as frentes de onda têm um amortecimento, característico dos métodos de primeira ordem; métodos de ordem mais alta tenderiam a apresentar oscilações nas regiões de altos gradientes.

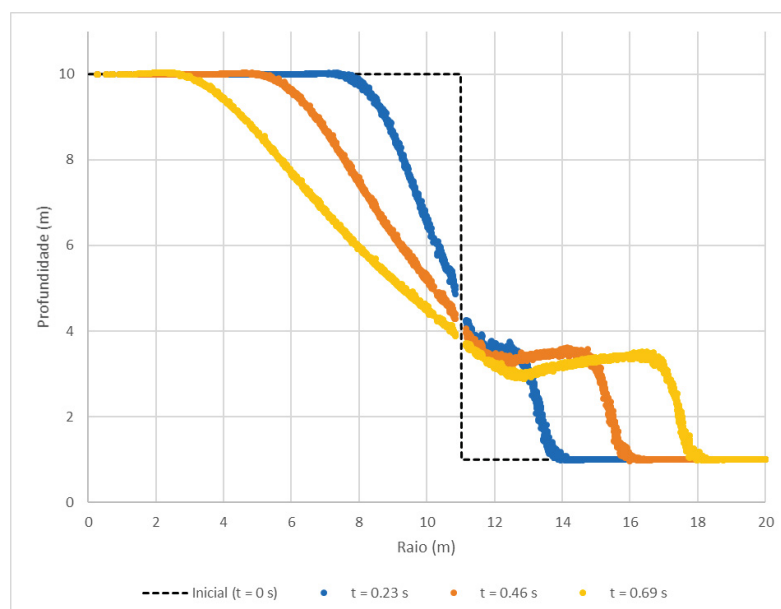


Figura 4.1 – Evolução do escoamento do instante inicial até 0,69 s

Utilizando as indicações de Basco (1989) para o cálculo do número de Ursell para este caso, obtém-se 1.400 (ver equação (2.23), $h=h_j=1$ m; $l=20$ m; $a \approx (h_m + h_j)/2 = 5,5$ m), bem maior do que a unidade, o que indica um caso fortemente não-linear.

Em Toro (2001) foi apresentado um tratamento numérico, que apresenta resultados muito bons, fazendo-se uma análise em duas dimensões axi-simétrico do escoamento da ruptura. Ainda que o cálculo seja numérico, ele é tratado como “semi-analítico” pelo autor; o método utiliza grande discretização no tempo e no espaço. A Figura 4.2 apresenta os resultados obtidos neste trabalho, sem a consideração da correção de Boussinesq; os resultados são

praticamente idênticos aos obtidos por Schwanenberg (2003) considerando as Equações de Águas Rasas.

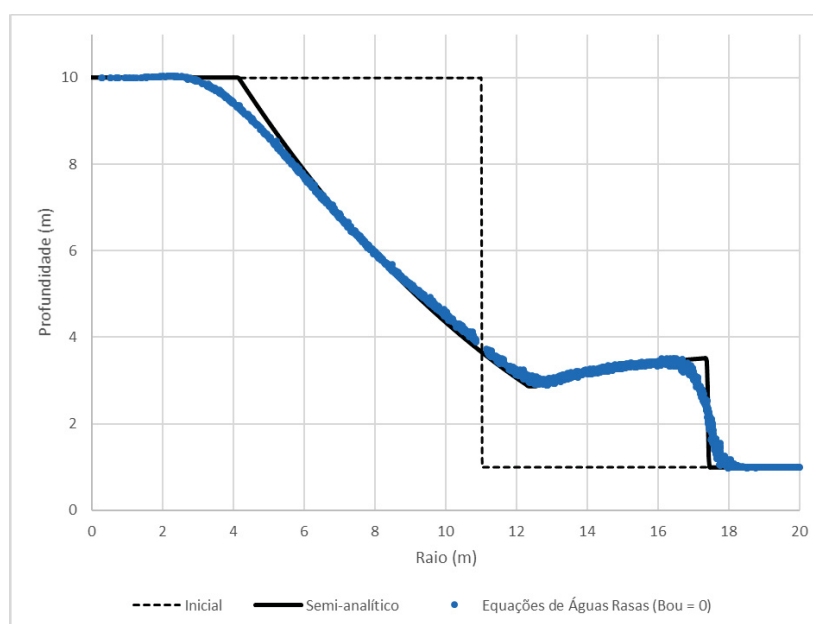


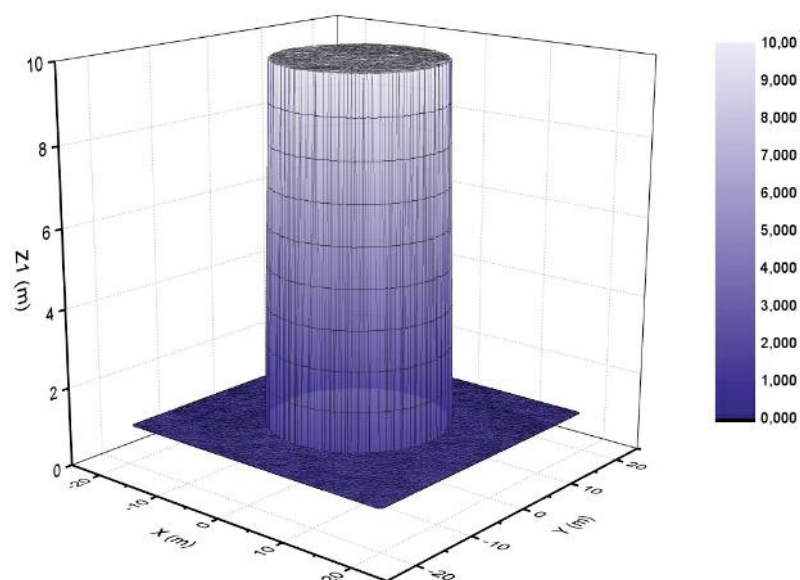
Figura 4.2 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo sem a consideração da correção de Boussinesq

A Figura 4.3 apresenta uma visão em 3D da condição inicial estudada e o resultado após 0,69 s do rompimento.

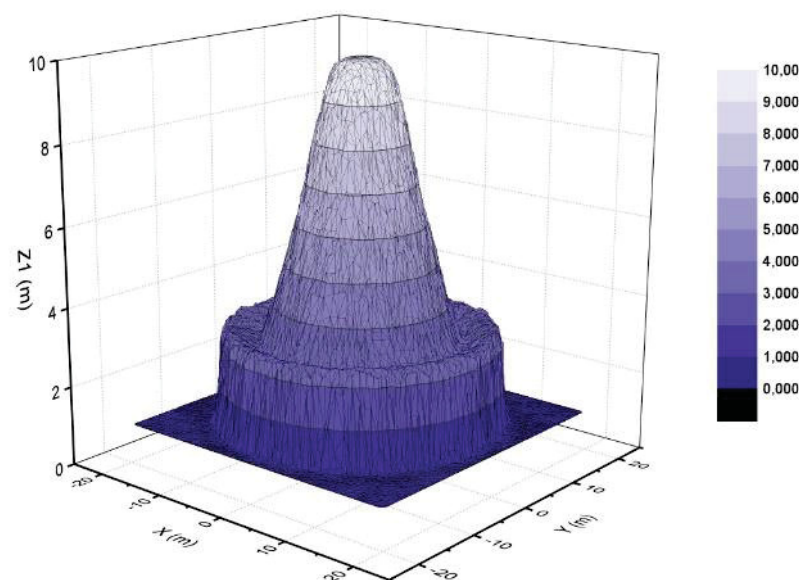
As parcelas da correção de Boussinesq foram simuladas isoladamente e em conjunto, como apresentadas na equação (3.34) – B_1 , B_2 e B_3 , com a soma das parcelas sendo chamada de B_4 e as equações de Águas Rasas, onde a correção de Boussinesq não é utilizada, sendo representada por B_0 . Na programação, estas indicações são realizadas através de uma variável de controle denominada Bou. Se Bou é igual a 0, estamos com as equações de águas rasas; se Bou é adotado igual a 4, estamos com as equações de Boussinesq completas. Se Bou for adotado igual a 1, 2 ou 3, apenas esta parcela – 1ª, 2ª ou 3ª – do termo de correção será levada em conta nos cálculos.

A Figura 4.4 apresenta os resultados das três parcelas e do total em confronto com a solução de Águas Rasas convencionais. Na Figura 4.5 é apresentada uma visão em destaque da frente de onda com as mesmas considerações referentes às correções. Nestas figuras a plotagem se deu pelo raio, o que concentra todo o leque de resultados obtidos em coordenadas cartesianas (x e y) no raio ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Observa-se uma dispersão dos resultados em relação ao valor de referência – obtido com as Equações de Águas Rasas. A região onde se observa a formação

da onda é onde são observadas as variações nos valores calculados com a consideração da correção de Boussinesq. Nestas figuras pode-se observar que os termos B_1 , B_2 e B_3 têm influência decrescente nos valores obtidos, como comentado por Basco (1989) e Abbott (1979), que citam que o primeiro termo como o de maior influência.



$t = 0 \text{ s}$



$t = 0,69 \text{ s}$

Figura 4.3 – Condição de escoamento inicial e após 0,69 s no rompimento de uma barragem circular com nível de água a jusante baixo

A determinação da correção de Boussinesq implica em um aumento substancial no esforço computacional dispendido na obtenção da resposta. A Tabela 4.3 apresenta uma comparação entre os tempos de processamento para cada análise envolvida e a relação entre o tempo da simulação e o tempo de simulação para a consideração de Águas Rasas, que representa o esforço computacional adicional. Observa-se que o tempo de processamento é ampliado em no mínimo 6 vezes, em relação ao cálculo de Águas Rasas, atingindo oito vezes, como citado nos estudos de Hervouet e Jankowski (2000).

A Figura 4.6 e a Figura 4.7 apresentam seções do escoamento na região dos eixos y (onde $x = 0$ m) e x (onde $y = 0$ m), respectivamente. Devido ao fato de se utilizar uma malha triangular, a representação de seções transversais não é direta. Desta forma, adotou-se uma área de abrangência para permitir o traçado, como mostrado na Figura 4.8, plotando-se em relação à distância em cada eixo (adotou-se uma dispersão de 0,50 m em torno do eixo, para efeitos gráficos). A malha gerada possui em sua totalidade 5.422 elementos. Mostram-se nas figuras citadas acima as três parcelas individualmente, juntamente com a soma das parcelas, todas em comparação com a análise por Águas Rasas (representada por $Bou = 0$). A oscilação observada anteriormente revelou uma pequena assimetria do fluxo. Esta assimetria se apresenta em todas as parcelas.

TABELA 4.3 – TEMPOS DE PROCESSAMENTO EM FUNÇÃO DA CORREÇÃO DE BOUSSINESQ ADOTADA (TEMPO SIMULADO DE 0,69 S) E CORREÇÃO MÉDIA

Opção de simulação	Tempo de simulação (s)	Relação entre tempos de processamentos	Correção média (%)
Águas Rasas ($Bou=0$)	21,04	1,00	-
Primeiro termo da correção B_1 ($Bou = 1$)	172,93	8,22	3,41
Segundo termo da correção B_2 ($Bou = 2$)	139,73	6,64	2,35
Terceiro termo da correção B_3 ($Bou = 3$)	140,30	6,67	1,99
Correção de Boussinesq completa B_1, B_2 e B_3 ($Bou = 4$)	175,51	8,34	3,41

Observações:

A relação entre tempos de processamento toma por padrão o tempo de cálculo para a equação de Águas Rasas;

A Correção média é a média aritmética das correções observadas, em valores absolutos em cada ponto, em relação ao valor obtido com as Equações de Águas Rasas.

O computador utilizado nas simulações foi um AVELL 1513 – processador i7, com 16 GB de memória RAM, placa gráfica de 1GB e armazenamento em disco SSD de 128 GB.

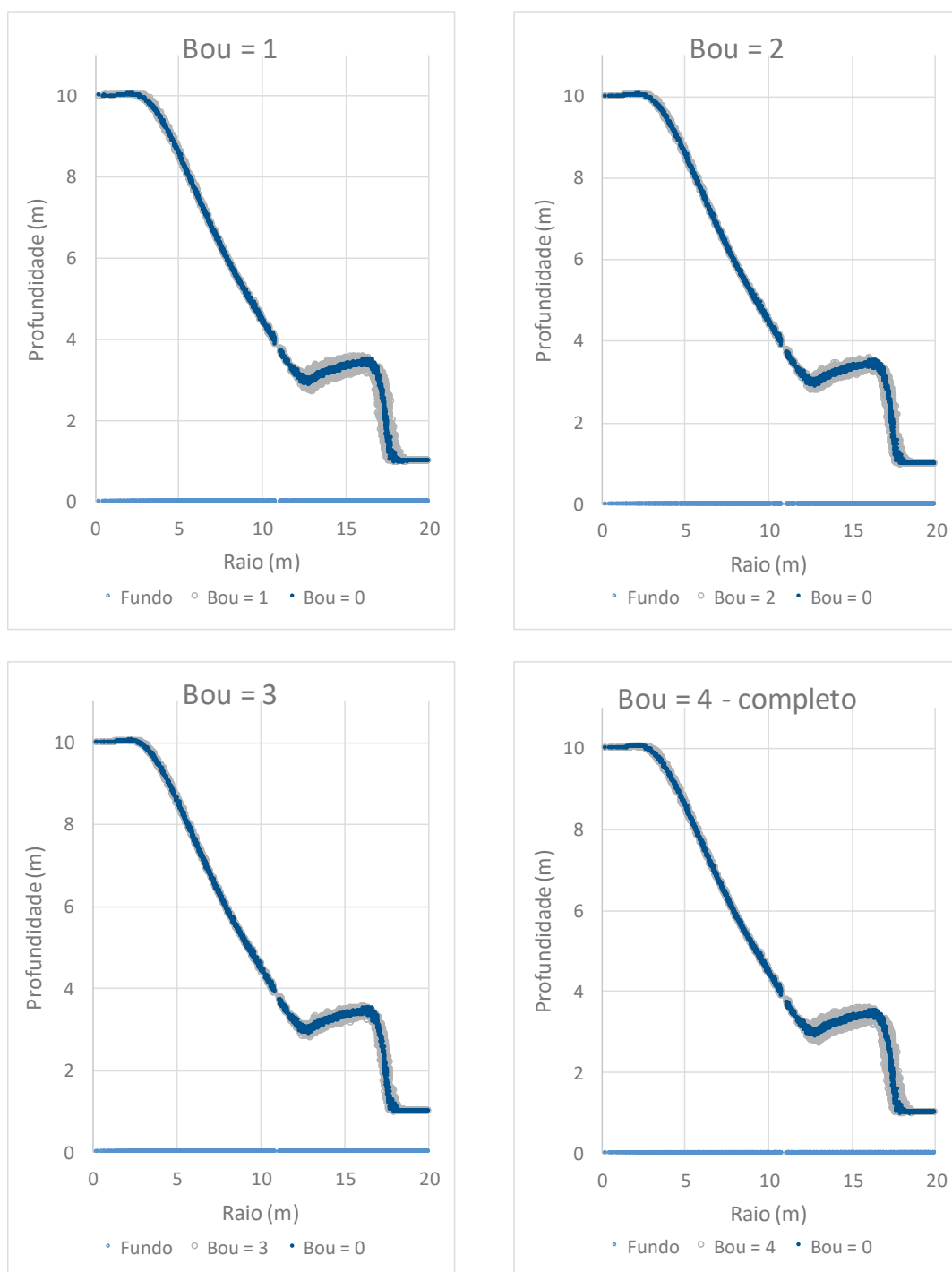


Figura 4.4 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas

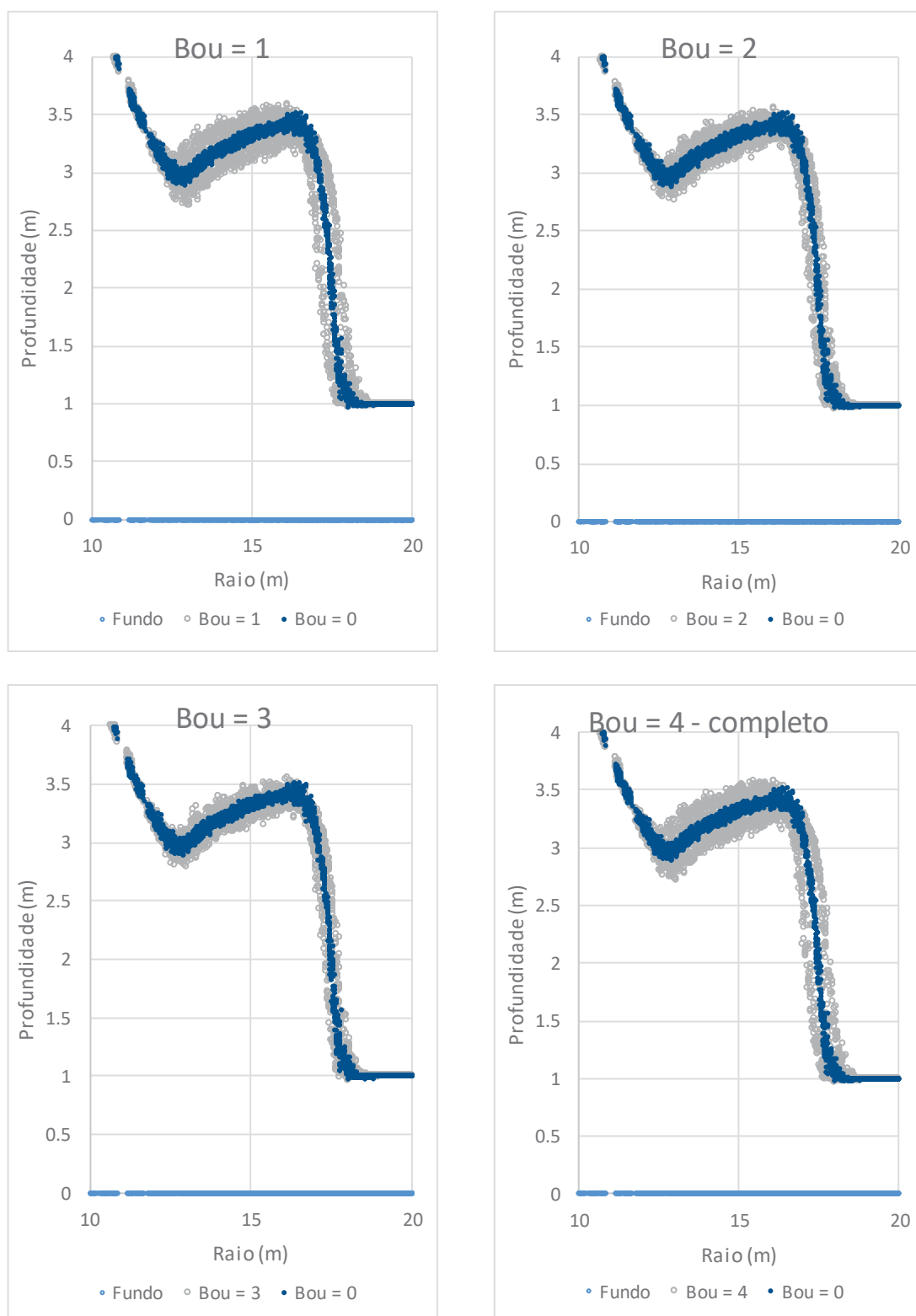


Figura 4.5 – Detalhe na região da frente de onda do escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas

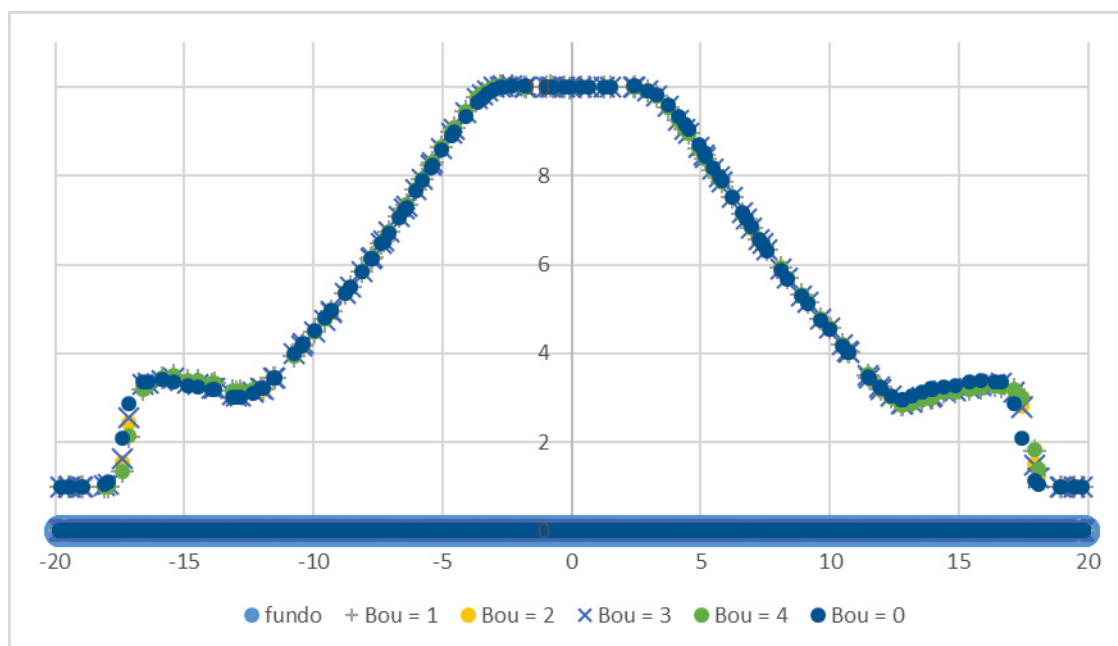


Figura 4.6 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m)

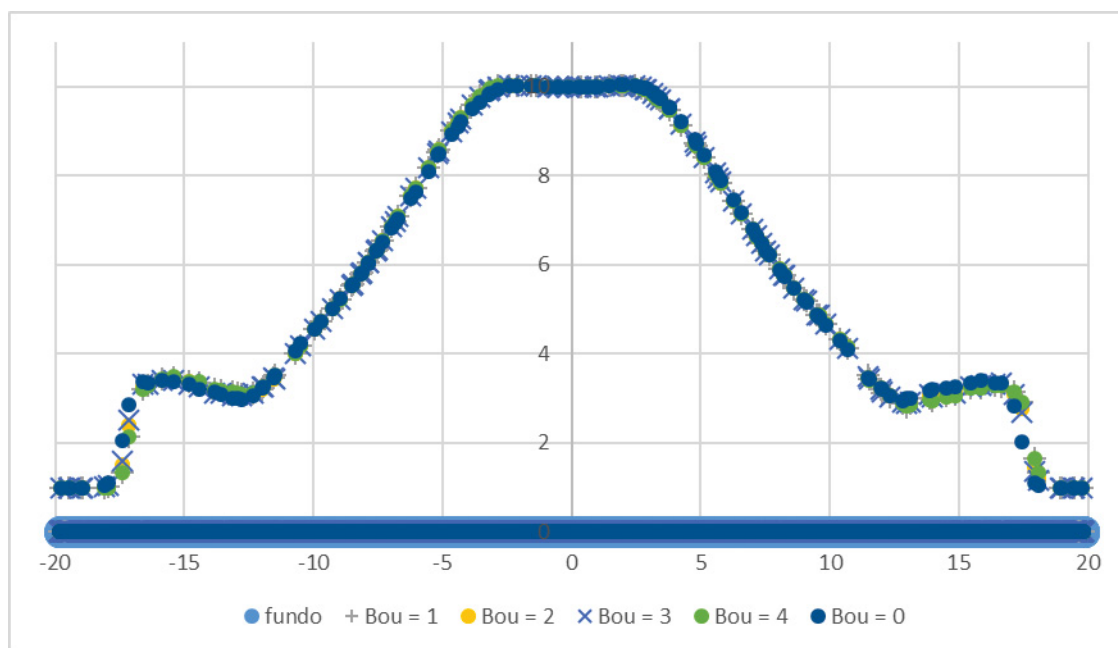


Figura 4.7 – Seção transversal no entorno do eixo x ($y \sim 0$ m)

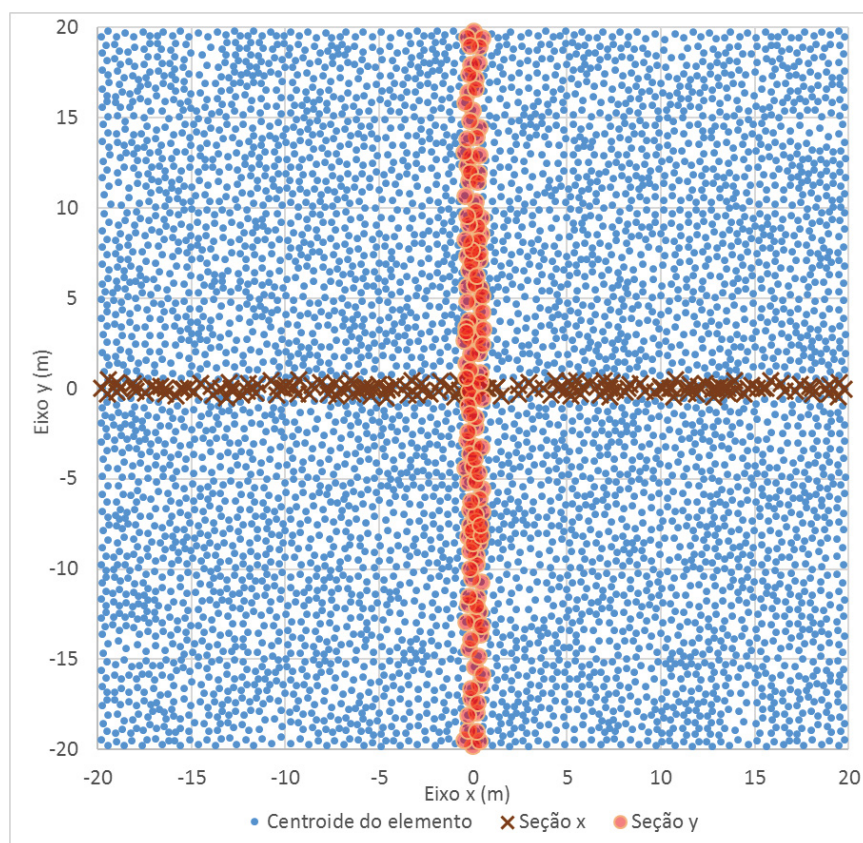


Figura 4.8 – Pontos adotados para elaboração das seções transversais

Analisando-se as parcelas isoladamente, observa-se que a primeira parcela, que é referente à derivada cruzada no tempo e no espaço, é a que mais tem influência. As segundas e terceiras parcelas – que representam as variações apenas no espaço, em primeira e segunda derivadas – apresentam pouca influência. Na Tabela 4.3 são apresentados, ainda, os valores médios das correções observadas em cada simulação, tendo como referência o resultado com as Equações de Águas Rasas. Esse cálculo é realizado com os valores absolutos das diferenças. Observa-se uma correção média em torno de 3 % em todo o domínio. Foi adotado o limitador na correção de no máximo 10 %, apresentado no item 3.4.4.

A assimetria observada pode ser creditada à forma como as derivadas calculadas em cada ponto são compostas com a formulação original. As velocidades são basicamente simétricas, em função das condições do escoamento. As primeiras derivadas possuem o mesmo sinal, e são elevadas ao quadrado; desta forma, de um lado a correção – parcela B_I – aumenta o valor positivo e do outro diminui o valor negativo, causando assimetria. Já a observação da derivada segunda mostra que seus valores são contrários, pois de um lado a sua representação

é côncava e do outro convexo. No entanto, para a geração da correção B_2 , é necessário multiplicar esta derivada pelo valor da velocidade, também com sinais contrários. Desta forma, o termo final será sempre de valor positivo, sendo adicionado de um lado do eixo, e subtraído do outro. A análise da derivada cruzada no tempo e espaço – parcela B_I – é mais complexa, mas pode seguir na mesma linha que as parcelas anteriores.

A seguir são apresentados os resultados obtidos com a formulação completa de Boussinesq – soma das três parcelas – em confronto com resultados de outras referências bibliográficas. Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004) estudaram o mesmo caso de rompimento de barragem. Os cálculos de ambos os artigos foram realizados utilizando a técnica de Volumes Finitos, com discretização TVD; o artigo de Gottardi e Venutelli (2004) utilizou, ainda um esquema Mac Cormack para refinamento. A Figura 4.9 apresenta os resultados desses pesquisadores, retirados da Figura 2.13 em confronto com o resultado analítico e os resultados obtidos neste estudo, utilizando a formulação de Águas Rasas – idêntico a Schwanenberg (2003) – e a de Boussinesq (completo). Esta plotagem foi realizada pelo raio, agrupando-se todos os resultados obtidos, o que causa a dispersão apresentada na figura. Observa-se que o método de Schwanenberg (2003), e adotado como base deste estudo, representam melhor os resultados esperados. A utilização da correção de Boussinesq nas equações de Águas Rasas conduziu a assimetrias no escoamento. Os estudos de Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004) aproximam-se dos resultados semi-analíticos, mas os valores obtidos por Schwanenberg (2003) ajustam-se melhor aos resultados semi-analíticos. A suavização que pode ser observada nos resultados dos estudos citados apresentados na Figura 4.9 é devida à precisão dos resultados, obtidos graficamente a partir das poucas informações disponibilizadas nas figuras das referências.

Conclui-se que o Método RKDG é o melhor adaptado para o caso estudado em relação os modelos propostos por Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004). A consideração da correção de Boussinesq não melhorou os resultados obtidos – criando inclusive uma assimetria – e aumentou o tempo de processamento substancialmente. Deve-se ter em mente que a solução semi-analítica foi desenvolvida a partir das equações de Águas Rasas e, portanto, era de se esperar diferenças quando se comparasse o resultado das Equações de Boussinesq com a solução semi-analítica.

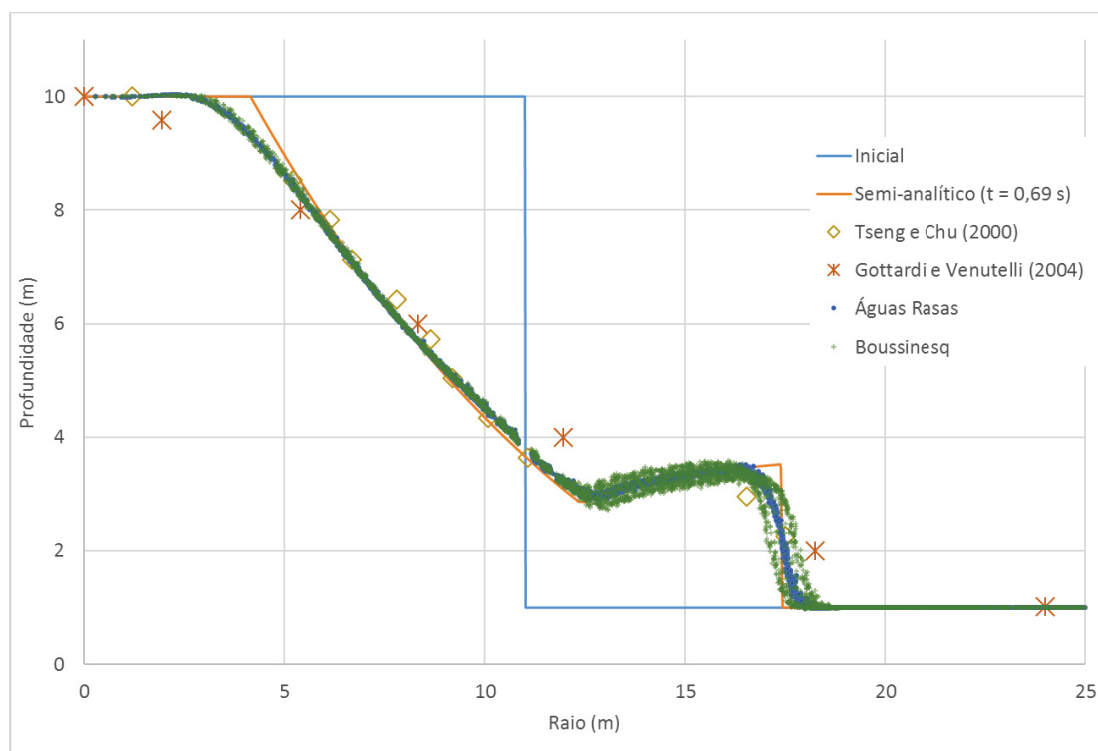


Figura 4.9 – Escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica –resultados obtidos por Tseng e Chu (2000) e Gottardi e Venutelli (2004) em confronto com o resultado semi-analítico e com os resultados deste estudo – Águas Rasas e Boussinesq

A Figura 4.10 apresenta as diferenças obtidas entre os níveis de água considerando a correção de Boussinesq ou não (equação de Saint-Venant). Observa-se que as diferenças são normalmente inferiores aos 10% adotados como limitador. No entanto, na região da frente de onda os valores podem ser bem mais elevados, pois um pequeno deslocamento da onda pode causar grande elevação no nível de água, tendo em vista o forte gradiente observado nesta região.

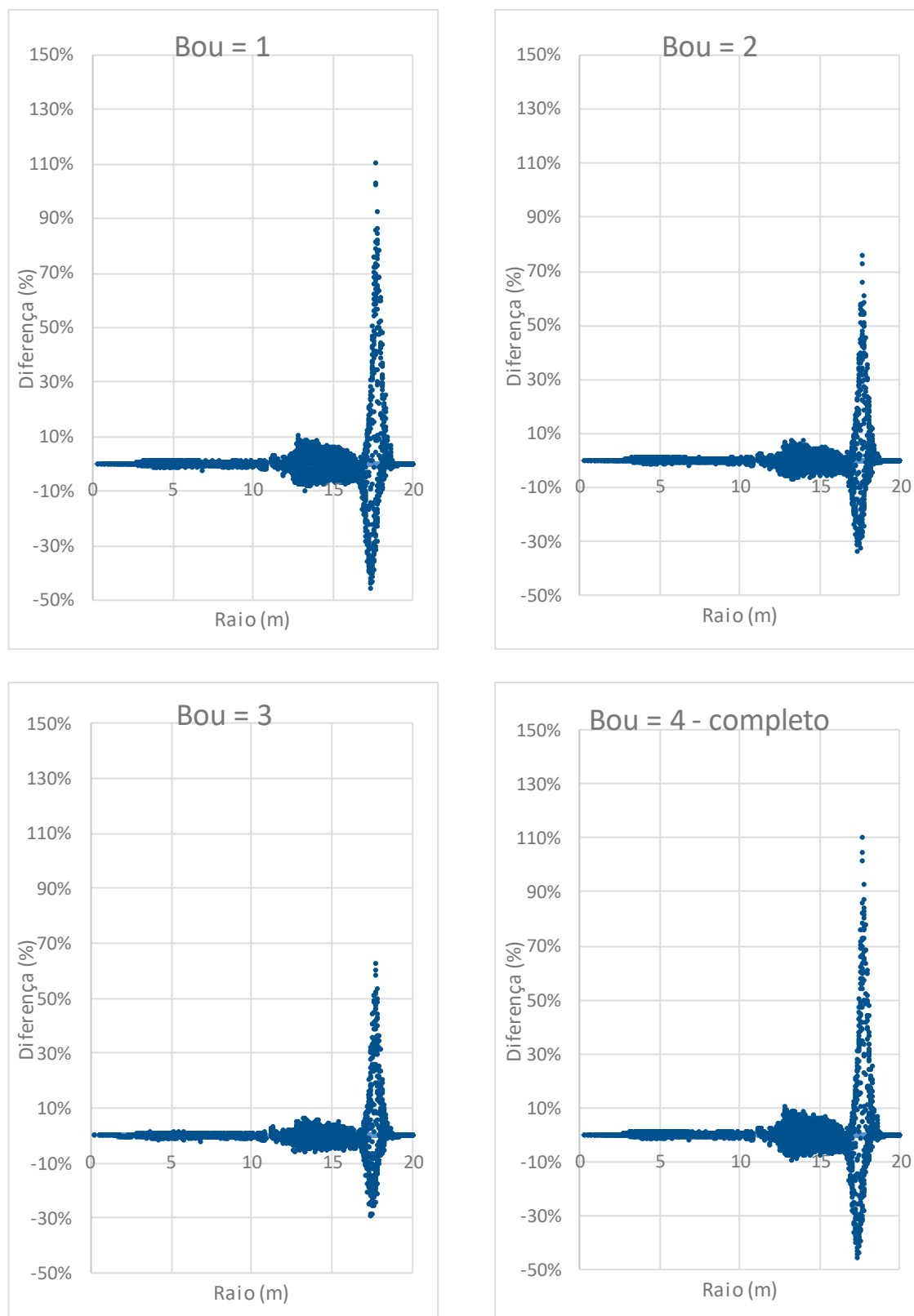


Figura 4.10 – Diferenças observadas – percentualmente – entre os níveis de água considerando ou não a correção de Boussinesq, para nível inicial a jusante baixo

4.3. ROMPIMENTO DE UMA BARRAGEM CILÍNDRICA COM NÍVEL DE JUSANTE ALTO

Este caso foi descrito no item 2.9.3 deste trabalho. Apresenta como diferencial do caso anterior uma alta relação de profundidade inicial e profundidade a montante (60%) que, segundo Pereira (1996), conduz à necessidade de se utilizar aproximações de ordens superiores às de Saint-Venant (o seu estudo foi unidimensional). Ainda segundo Pereira (1996), para relações entre as profundidades a jusante e a montante entre 1,00 e 0,56 formam-se ondas secundárias no escoamento, denominadas ondas de Favre – detalhes podem ser observados em Favre (1935) – com ondulação em uma grande extensão do canal, devido à não hidrostaticidade das pressões. Neste caso, a utilização das equações de Saint-Venant apresenta resultados médios e não os máximos e mínimos necessários para a determinação das ondulações. A Figura 4.11 apresenta uma imagem destas ondas em um escoamento unidirecional, apresentada por Pereira (1996).

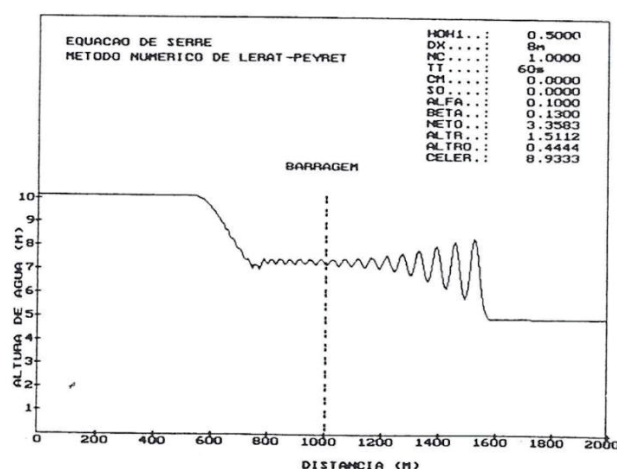
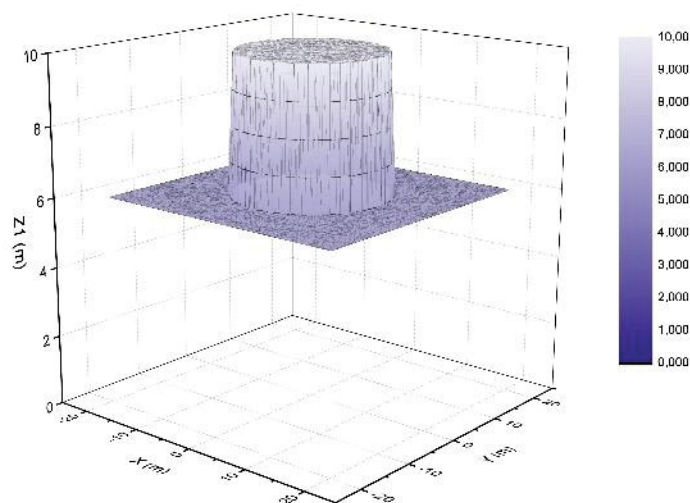


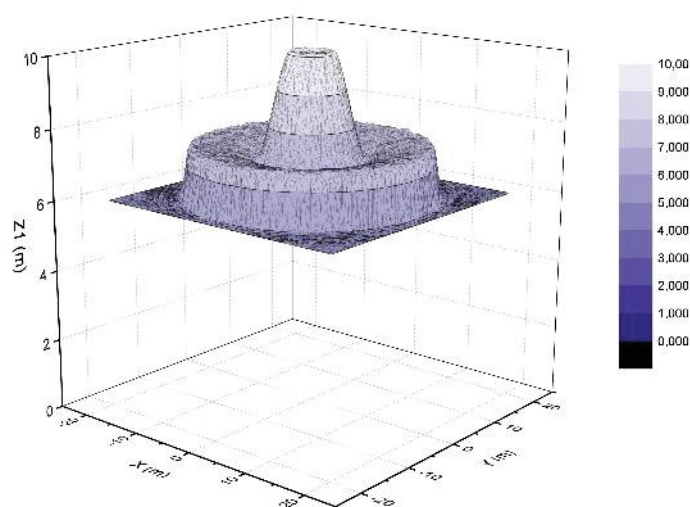
Figura 4.11 – Configuração do escoamento unidimensional no rompimento de uma barragem com nível de água alto a jusante – Pereira (1996)

Utilizando as indicações de Basco (1989) para o cálculo do número de Ursell para este caso, obtém-se 3,70 (ver equação (2.23), $h=h_j=6$ m; $l = 20$ m; $a \approx (h_m + h_j)/2 = 8,0$ m). Observa-se que frente ao caso anterior, este apresenta maior difusão, mas ainda a não-linearidade está presente.

A Figura 4.12 apresenta uma visão em 3D da condição inicial estudada e o resultado após 0,69 s do rompimento.



a) $t = 0 \text{ s}$



b) $t = 0,69 \text{ s}$

Figura 4.12 – Condição de escoamento inicial e após 0,69 s no rompimento de uma barragem circular com nível de água a jusante alto

Foram realizados os mesmos estudos referentes aos termos de Boussinesq realizados para o caso do escoamento raso, com os resultados mostrados na Figura 4.13, onde se pode observar os resultados das três parcelas e do total em confronto com a solução de Águas Rasas

convencionais. A Figura 4.14 apresenta uma visão em destaque da frente de onda, para cada parcela de correção. Para este caso analisado, observa-se que as variações dos valores calculados considerando ou não a correção de Boussinesq restringe-se apenas às áreas de forte gradiente (início e final da onda gerada).

As Figura 4.15 e Figura 4.16 apresentam seções do escoamento na região dos eixos x e y, da mesma maneira que o descrito na Figura 4.8, plotando-se em relação à distância em cada eixo. Observa-se novamente leve assimetria dos níveis, sem obter as esperadas oscilações nos níveis de água, como indicado nos estudos de Pereira (1996) para uma dimensão.

A Figura 4.17 apresenta as diferenças obtidas entre os níveis de água considerando a correção de Boussinesq ou não (equação de Saint-Venant). Observa-se que as diferenças são sempre inferiores aos 10% adotados como limitador.

As conclusões desta aplicação são as mesmas que as obtidas no item 4.2 (com nível de água a jusante baixo). A adoção das equações de Boussinesq, levando em conta a distribuição não hidrostática de pressões, com a modelagem adotada, aumentou o tempo de processamento – como era esperado – mas não capturou a formação das ondas de Favre – esperadas para esta configuração – gerando apenas uma assimetria no fluxo, em intensidade inferior à observada no primeiro caso analisado, com nível de água a jusante da barragem baixo. Os valores observados para as correções neste caso são inferiores às correções observadas no primeiro caso (com nível de jusante inferior). A causa para esta menor correção está na inércia do escoamento; com mais água em repouso neste caso – são 4 metros de diferença de nível, ao invés de 9 metros no caso anteriormente analisado – o rompimento da barragem tem uma menor capacidade de aceleração do fluxo e, portanto, menor capacidade para gerar esforços.

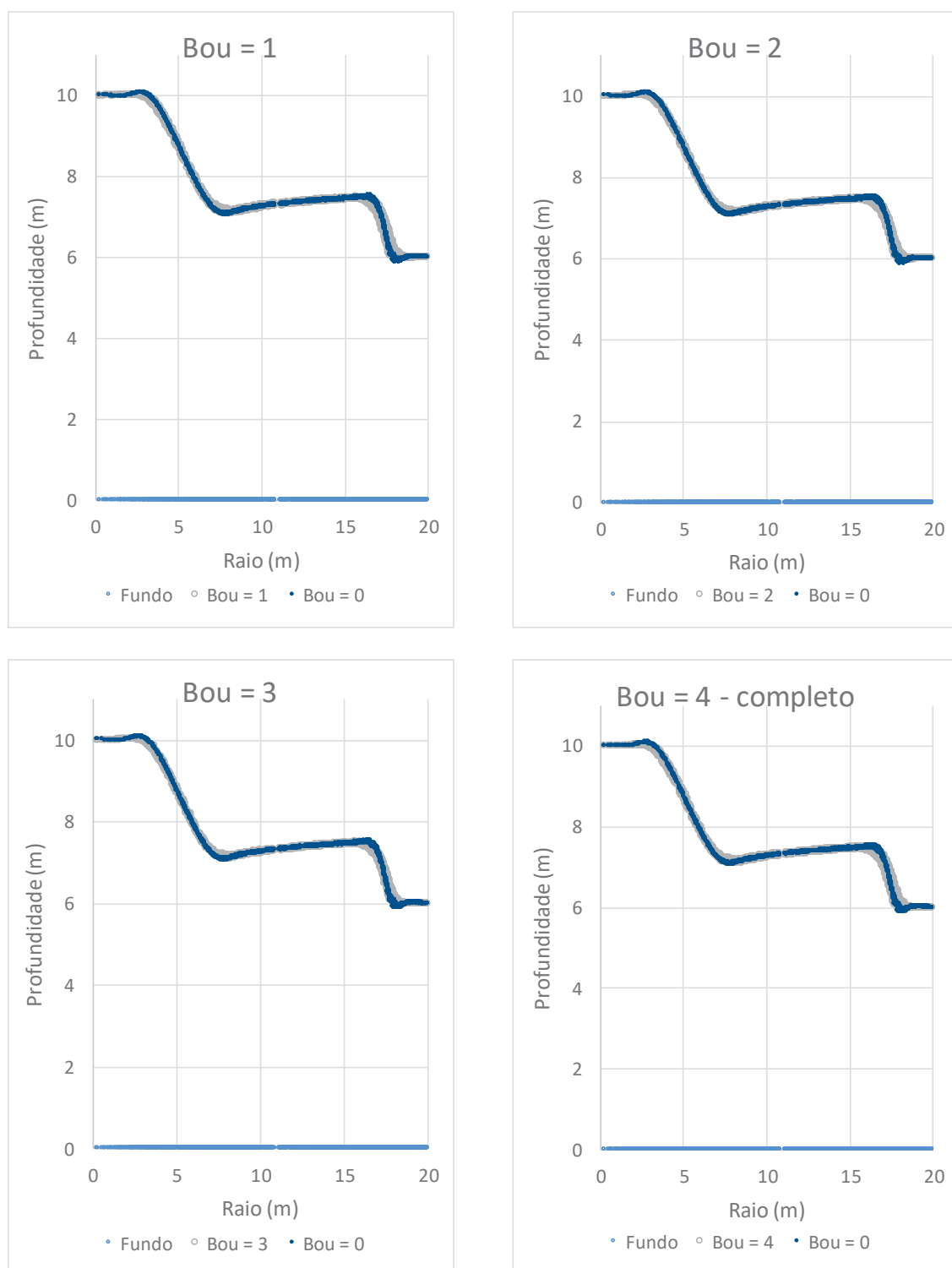


Figura 4.13 – escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica com nível de água alto a jusante – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas

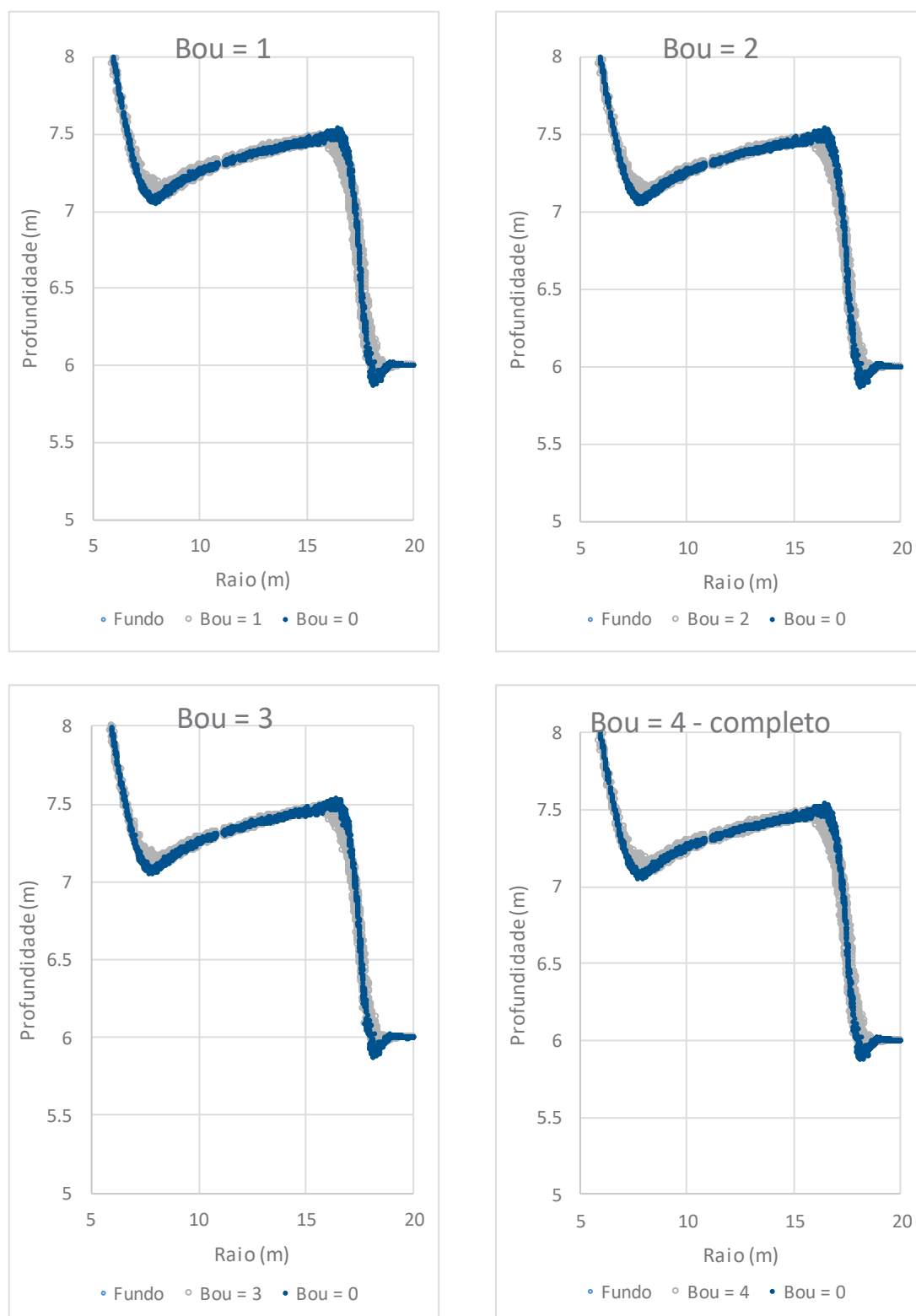


Figura 4.14 – Detalhe na região da frente de onda do escoamento após 0,69 s do rompimento de uma barragem cilíndrica com nível de água alto a jusante – resultados obtidos neste estudo em cada parcela de Boussinesq em confronto com a Equação de Águas Rasas

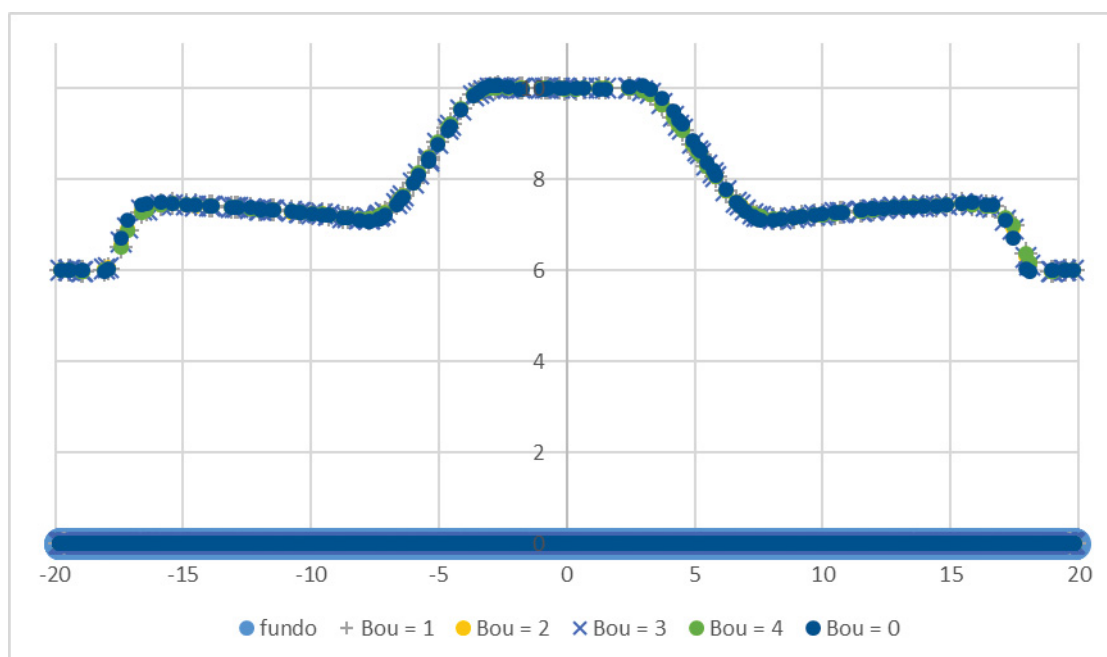


Figura 4.15 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m), para nível de água inicial alto a jusante

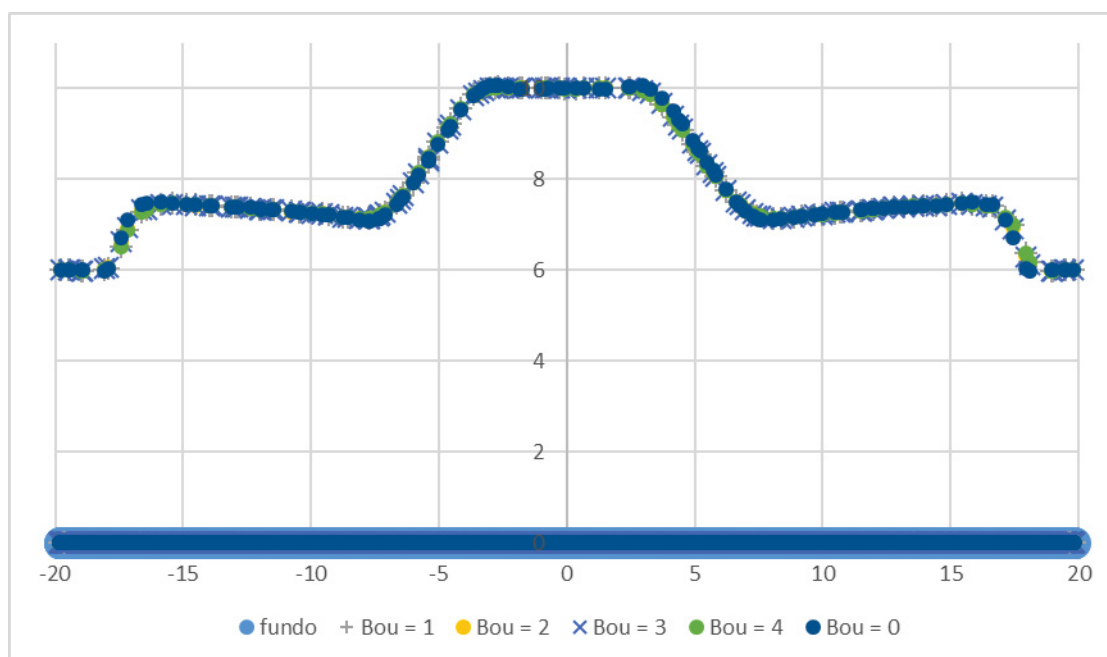


Figura 4.16 – Seção transversal no entorno do eixo y ($x \sim 0$ m), para nível de água inicial alto a jusante

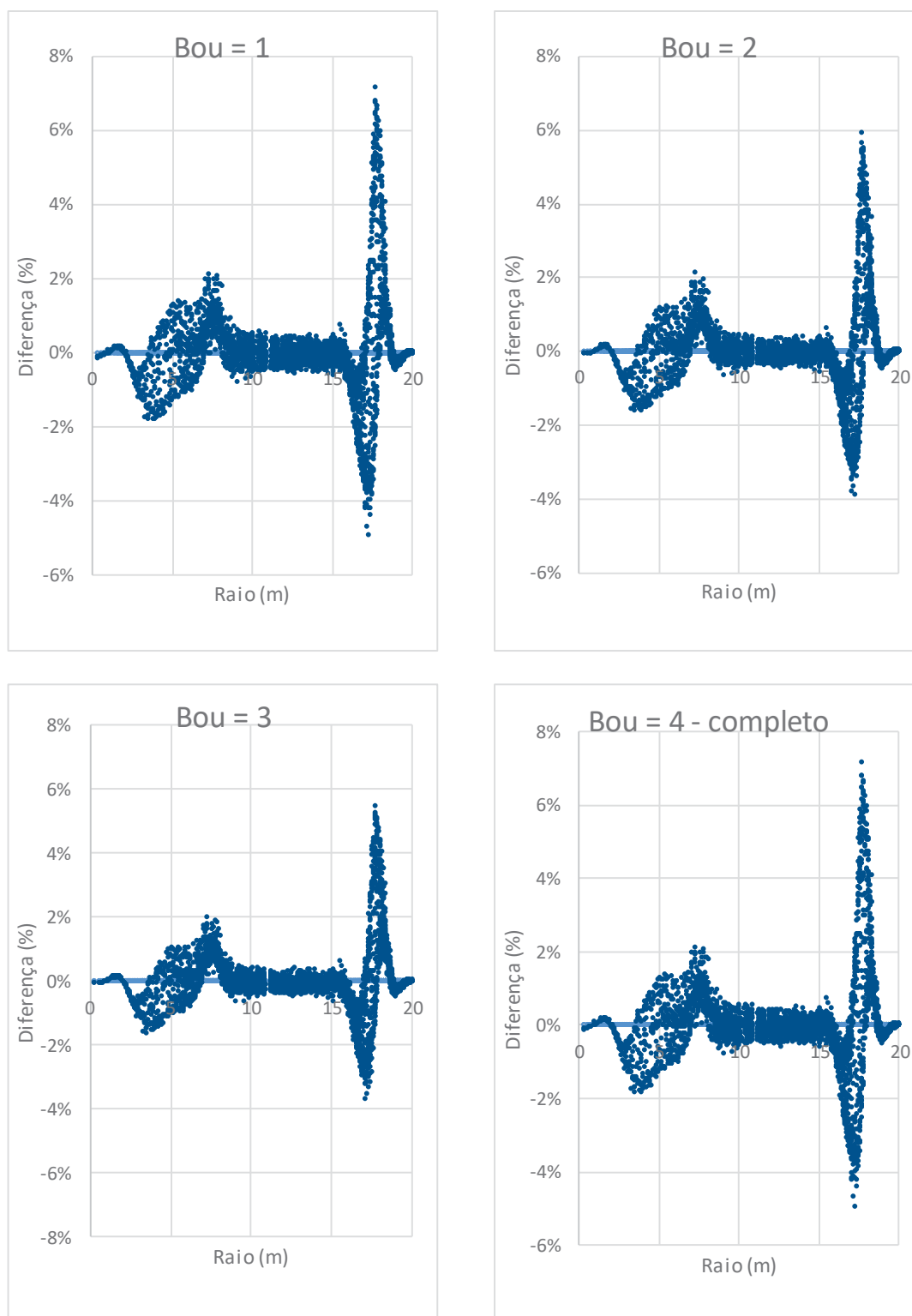


Figura 4.17 – Diferenças observadas – percentualmente – entre os níveis de água considerando ou não a correção de Boussinesq, para nível inicial a jusante alto

4.4. CONTRAÇÃO EM UM ESCOAMENTO SUPERCRÍTICO

Este caso foi descrito no item 2.9.4 deste trabalho. A malha adotada nos cálculos foi de 4.935 elementos, conforme mostrado na Figura 2.17. A simulação da correção de Boussinesq partiu de uma solução aproximada pelas Equações de Águas Rasas e, ao final, introduzida a correção de Boussinesq para a não-hidrostaticidade. Foram analisadas as três parcelas de correção (B_1 , B_2 e B_3), assim como a soma das três parcelas (B_4), que é a correção total. Os resultados foram confrontados com os resultados obtidos com a aplicação das Equações de Águas Rasas convencional. A Figura 4.18 apresenta o valor da correção básica (antes da multiplicação pelo termo $h^3/3$) para o termo B_1 e para cada elemento. Resultados semelhantes são apresentados pela Figura 4.19 (para a parcela B_2), pela Figura 4.20 (para a parcela B_3) e pela Figura 4.21 (para a soma das três parcelas – B_4). Todas estas correções são apresentadas para o último passo de tempo calculado.

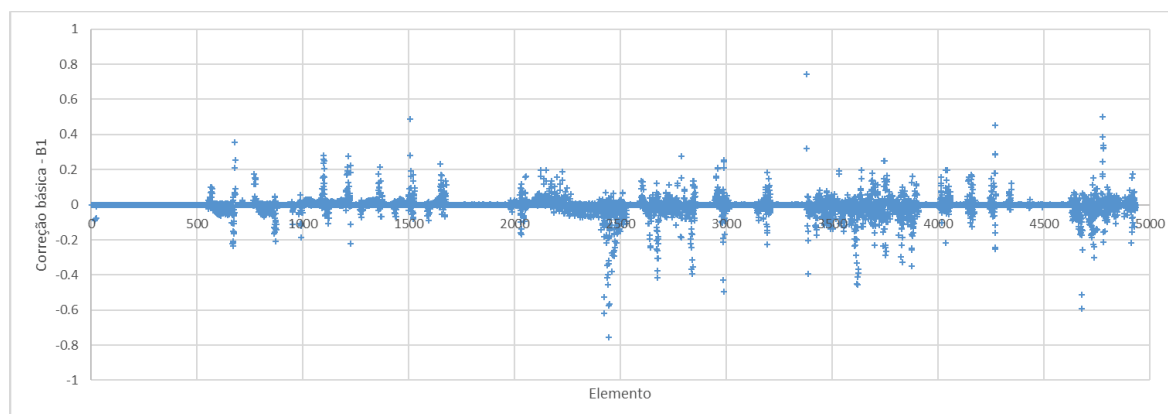


Figura 4.18 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_1

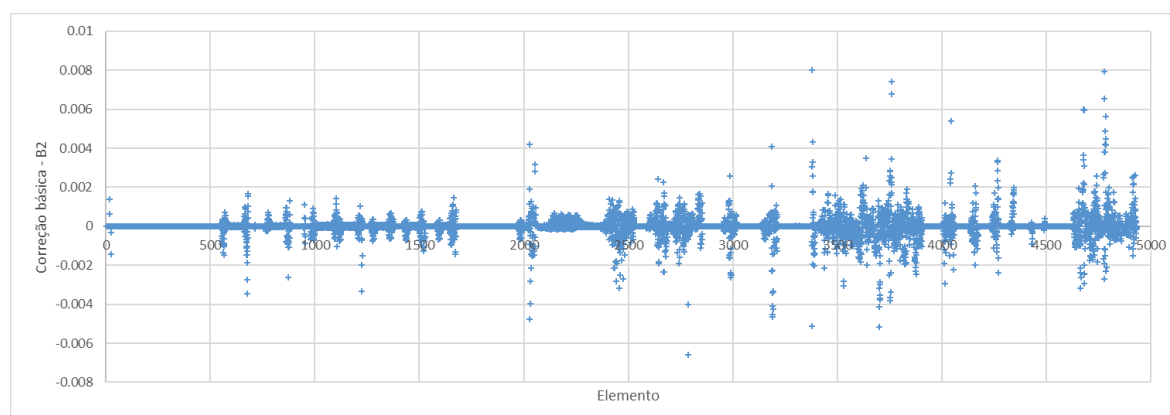


Figura 4.19 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_2

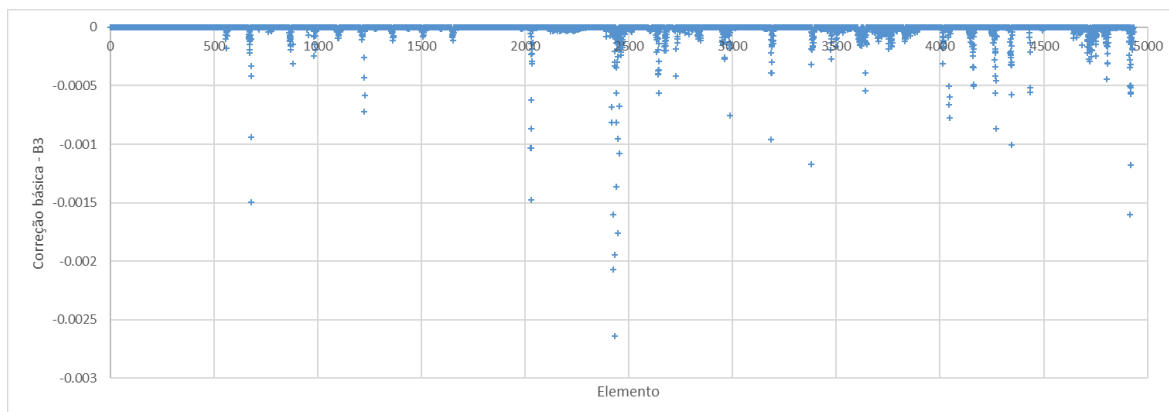


Figura 4.20 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_3

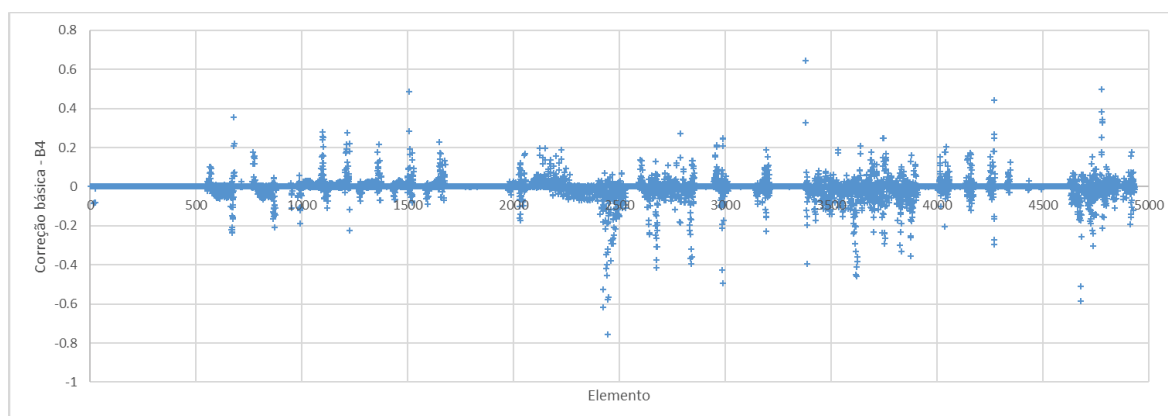


Figura 4.21 – Valor básico da correção de Boussinesq – parcela B_4

Todas essas correções devem ser multiplicadas por um terço da profundidade do escoamento ao cubo; neste caso este valor varia entre $9,0 \times 10^{-6}$ e $1,1 \times 10^{-4}$. As correções finais resultam aproximadamente nulas para todas as parcelas e em todos os elementos. Os resultados obtidos para todas as correções são, portanto, muito semelhantes aos obtidos com as Equações de Águas Rasas.

A Figura 4.22 apresenta o resultado obtido com a consideração da correção total de Boussinesq.

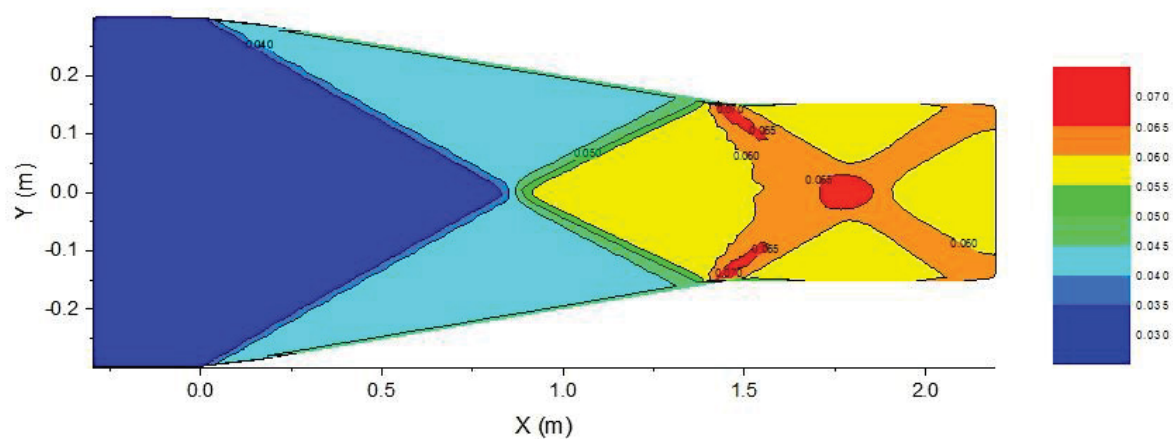


Figura 4.22 – Resultado da profundidade obtido com a correção completa de Boussinesq

A Figura 4.23 apresenta a visão em perspectiva do escoamento supercrítico na contração, mostrando as ondas geradas pelo fluxo ao longo do canal.

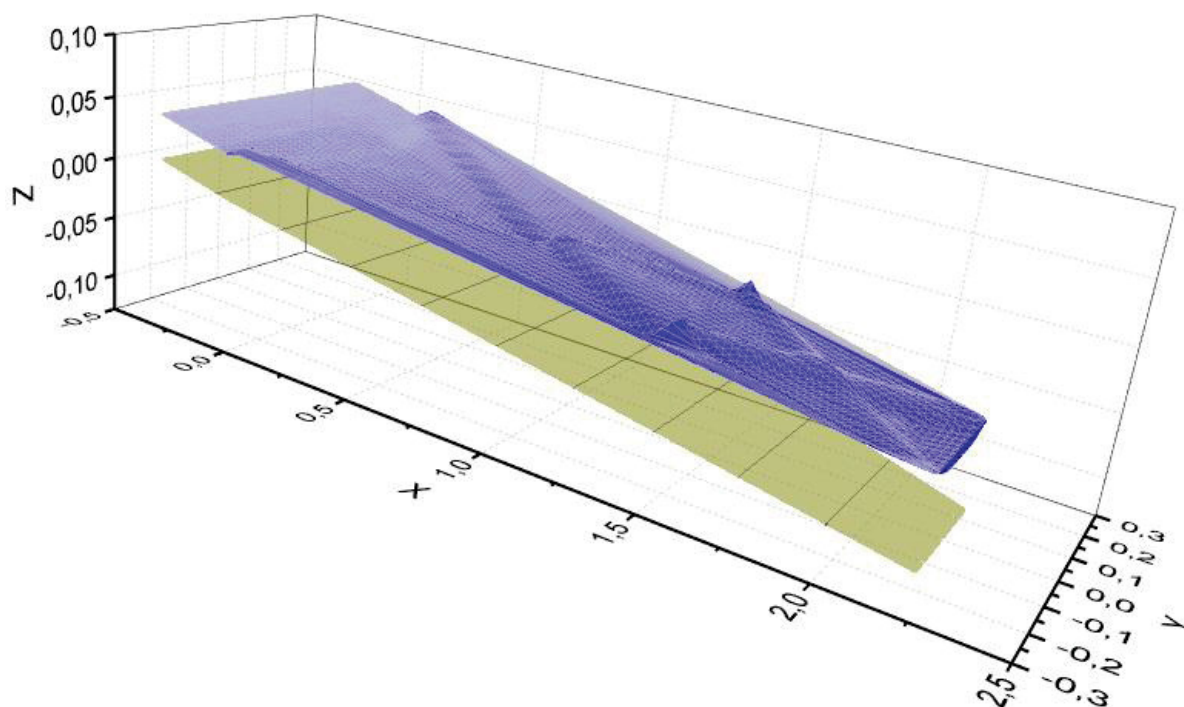
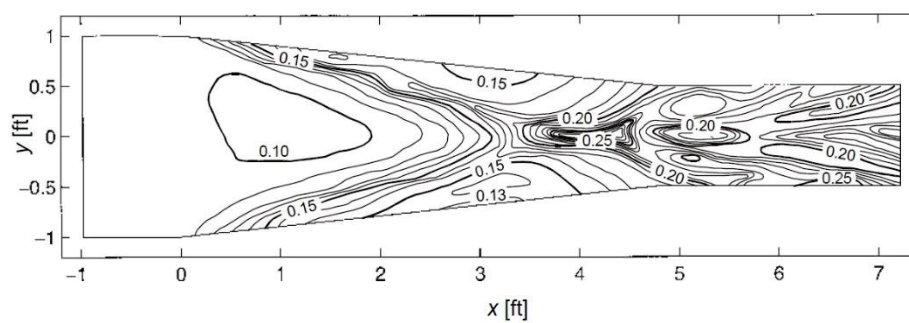
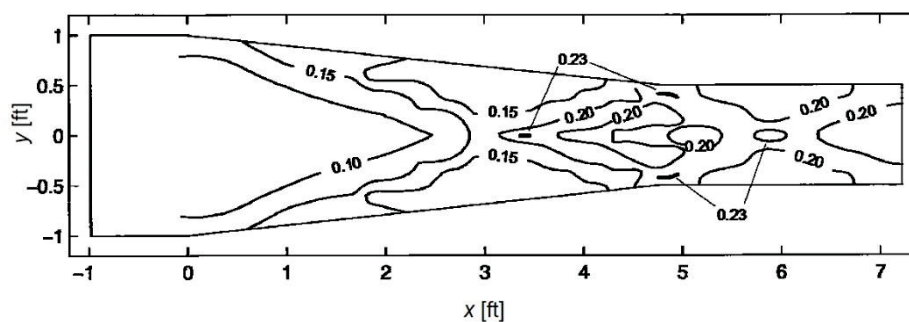


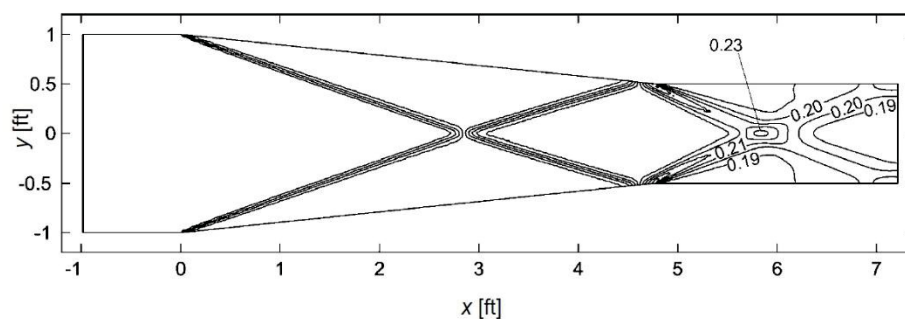
Figura 4.23 – Visualização em perspectiva dos níveis de água do escoamento na contração



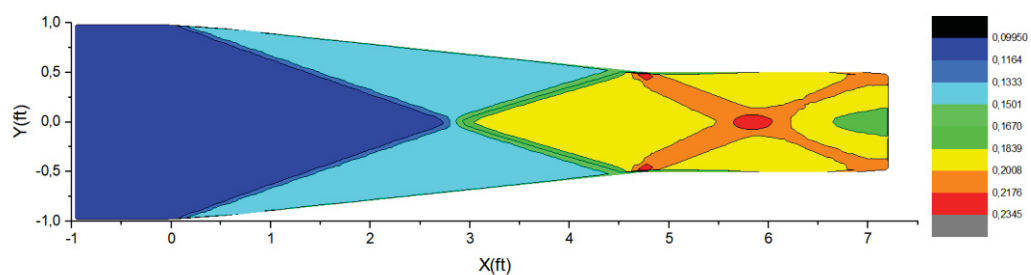
a) Ippen e Dawson (1951) – Experimental



b) Berger e Stockstill (1995) – computacional



c) Schwanenberg (2003) – computacional



d) Este estudo – computacional com consideração da correção de Boussinesq

Figura 4.24 – Comparativo dos resultados com o escoamento supercrítico em uma contração

Para permitir a comparação com os resultados apresentados nos estudos de Ippen e Dawson (1951) – experimental –, Berger e Stockstill (1995) – elementos finitos – e Schwanenberg (2003) – Runge-Kutta Galerkin Descontínuo, apresentados no item 2.9.4, os valores aqui obtidos, em metros, foram transformados para pés ($1 \text{ pé} = 0,3048 \text{ m}$), e são apresentados na Figura 4.24. Observa-se na comparação que os métodos computacionais se aproximam bastante dos resultados experimentais. Os valores máximos obtidos por Berger e Stockstill (1995) são mais próximos dos valores experimentais, mas o campo de profundidades obtidos por Schwanenberg (2003) e neste estudo são mais simétricos e coerentes.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS

5.1. GENERALIDADES

A maioria das formulações matemáticas de escoamentos admite como hipótese básica a distribuição hidrostática de pressões.

Este estudo foi desenvolvido buscando responder as indicações da literatura de que a consideração de uma distribuição de pressões mais apropriada, diferente da hidrostática, poderia conduzir a melhores resultados na determinação numérica do escoamento com fortes gradientes como, por exemplo, em um rompimento de dique lateral em um canal – Roger *et al.* (2009) e Roger *et al.* (2010). Os trabalhos de Basco (1989) e Pereira (1996), desenvolvidos com modelos unidimensionais, sugerem que a distribuição não hidrostática de pressões conduz a melhores resultados de níveis de água ao longo do canal quando do rompimento de barragem com níveis de água a jusante elevados. Como se esperava que o escoamento em duas dimensões mostrasse a formação de ondas secundárias próximas à frente da onda principal, este também foi um foco do presente estudo.

5.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho é apresentada a formulação de Boussinesq, que leva em conta uma distribuição de pressões corrigida – não hidrostática na vertical – em escoamentos bidimensionais. É adotado um sistema de coordenadas cartesianas, e leva-se em conta a declividade do fundo e a perda de carga do escoamento. Esses resultados são apresentados nas equações (3.31) e (3.32), que estão deduzidas detalhadamente no Apêndice I. A apresentação destas equações é um ponto importante deste trabalho, e vem a preencher uma lacuna observada na revisão bibliográfica, onde estas equações são apresentadas apenas para escoamentos unidimensionais, ou onde a declividade e rugosidade do contorno são negligenciados.

Uma discretização para o termo de correção de Boussinesq é proposta neste trabalho, utilizando-se os valores de profundidade e velocidades calculados em cada ponto e admitindo-se uma superfície gerada pelo Método dos Mínimos Quadrados, a fim de calcular as derivadas existentes nos termos de correção em cada elemento. É proposta e adotada uma série de Fourier como função de interpolação, com um harmônico em cada dimensão espacial e

utilizando dados de 10 elementos (o elemento em estudo e nove vizinhos a ele). Os resultados apresentados referem-se todos a esta função de interpolação.

Como alternativa, foram testadas também funções polinomiais de segundo grau e série de Fourier com dois harmônicos em cada dimensão coordenada, mas os resultados não foram convergentes. A adoção de menos pontos, quatro ao invés de dez, apresentou problema semelhante.

O método numérico Runge-Kutta Galerkin Descontínuo (RKDG) mostrou-se aplicável às equações de Boussinesq, considerando-se uma correção a partir das Equações de Águas Rasas convencionais.

Tendo em conta os três casos analisados, onde foram aplicadas a consideração de Boussinesq de não-hidrostaticidade e os métodos de solução de RKDG (Runge-Kutta Galerkin Descontínuo) pode-se concluir que:

- Os resultados computacionais obtidos com a aplicação das Equações de Boussinesq foram semelhantes aos obtidos com a aplicação das Equações de Águas Rasas convencionais. Nos casos analisados com escoamento simétrico, o método adotado criou uma leve assimetria nos resultados, em função dos cálculos das derivadas de cada lado dos eixos. No caso da contração em um escoamento supercrítico, os resultados obtidos foram praticamente idênticos – indistinguíveis – aos resultados obtidos com a aplicação das Equações de Águas Rasas convencionais. Esta correção de pequena monta pode ser creditada à inércia do escoamento, que não permite uma aceleração tal que altere o campo de pressões no fundo do canal;

- A inclusão da formulação de Boussinesq aumenta em muito o tempo de processamento quando comparado com a formulação de Águas Rasas convencionais. Nos casos analisados, o aumento do esforço computacional foi da ordem de seis a oito vezes o esforço computacional necessário pelo mesmo programa, considerando as Equações de Águas Rasas convencionais. Os resultados obtidos, no entanto, foram muito próximos entre as duas formulações, não se apresentando melhoria nos resultados obtidos.

A hipótese original, de que a consideração da distribuição não hidrostática de pressões conduziria a resultados mais precisos nas variáveis do escoamento, não foi verificada nos exemplos analisados. No entanto, os testes realizados ainda podem não ser suficientes para descartar em definitivo tal hipótese, originando então o interesse por estudos ainda mais avançados.

5.3. RECOMENDAÇÕES PARA CONTINUIDADE DO ESTUDO

Com base nos estudos desenvolvidos e resultados obtidos, recomenda-se os seguintes pontos como continuidade deste trabalho:

- A função de interpolação adotada – em série de Fourier com um harmônico em cada direção espacial – pode ser alterada, com a inclusão de mais pontos, ou mesmo a alteração da função para outra forma, com a inclusão de mais harmônicos. A busca deve ser feita em funções que possam capturar e representar as ondas secundárias esperadas teoricamente – denominadas ondas de Favre. Como tentativas iniciais recomenda-se as funções spline cúbica ou spline exponencial;

- O método de Runge-Kutta, adotado para a discretização no tempo, pode ter a sua ordem aumentada, buscando uma maior estabilidade numérica;

- A adoção de uma malha retangular pode ser uma boa opção a ser estudada. Esta formulação conduz a complexidades na parte de tratamento de contornos, mas deve conduzir a métodos de tratamento dos termos de correção de Boussinesq mais simplificados do que os adotados em malhas triangulares;

- Buscando quantificar a influência da distribuição não hidrostática de pressões sobre o fundo do canal, o valor da pressão resultante em cada ponto, e em cada instante de tempo, pode ser determinado e confrontado com os valores resultantes da consideração de distribuição hidrostática de pressões. Pela formulação em duas dimensões proposta e adotada, não é possível determinar o perfil da distribuição de pressões, mas apenas a sua influência total no ponto. Há, portanto, espaços para pesquisas mais detalhadas;

- Novos casos podem ser analisados, como rompimento de barragens, ondas em canais com relativamente pequena amplitude ou escoamentos em canais com declividades de fundo mais intensas, a fim de verificar se é possível analisar a influência da distribuição de pressões nesses escoamentos.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, M. B., **Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows**, Pitman, London, 324 pg, 1979.
- ARNOLD, H.: **Simulation dambruchinduzierter Flutwellen**, Hannover : Universität, tese de doutorado, 125 pg., 1996.
- BASCO, David R.: *Limitations of de Saint-Venant equation in dam-break analysis*. **J. of Hydraulic Eng.**, v. 115, n. 7, p. 950-965, july 1989.
- BECKER, Eric B., CAREY, Graham F., ODEN, J. Tinsley: **Finite Elements: an Introduction, volum I**, Prentice-Hall : Englewood Cliffs NJ, 258 p., 1981.
- BERGER, R. C., STOCKSTILL, R. L., *Finite Element Model for High-Velocity Channels*, **ASCE Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 121 (10), 710-716, 1995.
- BETANCOURT, Fabián Omar Q.; PALACIO, Arturo P.; RODRIGUESZ, Alejandro V.; FUENTES DEL RIO, Daniel: *Uso de la Analogía de Flujo Compresible para Elaborar um Modelo Numérico de Aguas Somenas*, **Avances em Recursos Hídricos**, n. 16, octubre, pp. 17-30, 2007.
- BRISTEAU, Marie-Odile; GOUTAL, Nicole; SAINTE-MARIE, Jacques: *Numerical simulations of a non-hydrostatic shallow water model*, **Computer & Fluids**, vol. 47, pp. 51-64, 2011.
- CALLEFI, Vallerio; VALIANI, Alessandro; ZANNI, Andrea: *Finite method for simulating extreme flood events in natural channels*, **Journal of Hydraulic Research**, vol. 41, n. 2, pp. 167-177, 2003.
- CHAUDHRY, M. Hanif: **Open-channel flow**, Springer Science & Business Media, 523 p., 2008.
- CHEN, Cheng-Iung, ARMBRUSTER, Jeffrey T.: *Dam-break wave model : formulation and verification*. **J. of the Hydraulics Div.**, v. 106, n. 5, p. 747-767, may 1980.
- COCKBURN, Bernardo; SHU, Chi-Wang: *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*, **Journal of Scientific Computing**, vol. 16, n. 3, pp. 173-261, September, 2001.
- COLLISCHONN, Walter: **Análise do rompimento hipotético da barragem de Ernestina-RS**, Porto Alegre : IPH, Dissertação de mestrado, UFRGS, 192 p., 1997.
- COSTA, J. C. E.: *Estimativa de onda de cheia proveniente de ruptura hipotética de barragem e sua propagação segundo metodologia do National Weather Service*. Apresentado no IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, **Anais**, 1978, Belo Horizonte.
- CUNGE, J. A. ; HOLLY, Forrest M. ; VERWEY, Adri : **Practical aspects of computational river hydraulics**, London : Pitman, 1980, 420 p.
- DZIEDZIC, Maurício: **Investigação sobre a aplicabilidade de um esquema de elementos finitos para a solução das equações de Saint-Venant**, Curitiba : UFPR, 166 p. Dissertação de mestrado em Eng. Hidráulica – Universidade Federal do Paraná, 1988.
- ELIZAROVA, T.G.; BULATOV, O.V.: *Regularized shallow water equations and a new method of numerical simulation of the open channel flows*; **Computers & Fluids**; Jul

- 2011, Vol. 46 Issue 1, p206-211; 2011.
- FABIANI, André L. T.: **Contribuição ao estudo das ondas geradas pela ruptura de barragens**, dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, 1995.
- FAGHERAZZI, Sergio; RASSETARINERA, Patrick; HUSSAINI, M. Youssuff; FURBISH, David J.: *Numerical solution of the dam-break problem with a discontinuous Galerkin method*; **Journal of Hydraulic Engineering** : American Society of Civil Engineers; vol. 130, n. 6, June 2004, p. 532-539.
- FAVRE, Henry: **Étude Théorique et Expérimentale des Ondes de Translations dans le Canaux Découverts**, Dunod : Paris, 216 p, 1935.
- FERRIS, T.: **The complete history of the Johnstown Flood**, New York : H. S. Goodspeed & Co., 552 p, 1889.
- FERZIGER, Joel H.; PERIĆ, Milovan: **Computational fluid dynamics**, Germany : Springer, capítulo 11 (Efficiency and accuracy improvement), 389 p., 1999.
- FORTUNA, Armando O.: **Técnicas computacionais para mecânica dos fluidos** : conceitos básicos e aplicações, São Paulo : EDUSP, 427 p., 2000.
- FREAD, D. L.: *Implicit flood routing in natural channels*, by M. Amini and C. S. Fang. **J. of Hydraulic Div.**, v. 97, n. HY7, p. 1156-1159, July 1971. *Discussão*.
- FREAD, Danny L.: *Technique for implicit dynamic routing in rivers with tributaries*. **Water Resources Research**, v. 9, n. 4, p. 918-926, 1973.
- FREAD, D. L.: **THEORETICAL DEVELOPMENT OF AN IMPLICIT DYNAMIC ROUTING MODEL** (em preparação para um relatório técnico do NOAA), U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Weather Service, 120 páginas, (Revisão do original datado de 13 de dezembro de 1976) (DLF Publication #25). November 1978.
- FREAD, D. L.: *National Weather Service models to forecast dam-break floods*, in: STAROSOLSZKY, O., MELDER, O. M. (Eds.) **Hydrology of Disasters**. London : WMO, 1989, p. 192-211. Proceedings of the Technical Conference on the Hydrology of Disasters, Geneva, 1988a.
- FREAD, D. L.: **The NWS DAMBRK model** : theoretical background/ user documentation. Silver Spring : U. S. Department of Commerce, 1988b. paginação irregular.
- FREAD, D. L.; HARBOUGH, T. E.: *Transient hydraulic simulation breached earth dams*. **J. of Hydraulics Div.**, v. 99, n. 1, p. 139-154, Jan. 1973.
- FREAD, D. L.; SMITH, G. F.: *Calibration technique for 1D unsteady flow models*. **J. of Hydraulics Div.**, v. 104, n. 7, p. 1027-1044, Jul. 1978.
- GARCÍA-NAVARRO, P.; VAZQUEZ-CEDON, M. E.: *On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations*, **Computer and Fluids**, vol. 29, pp. 951-979, 2000.
- GE, Liang; CHEUNG, Kwok Fai e KOBAYASHI, Marcelo H.: *Stochastic Solution for Uncertainty Propagation in Nonlinear Shallow-Water Equations*, **Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 134, n.º 12, pp. 1732-1743, 2008.
- GÓMEZ-GESTEIRA, M.; DALRYMPLE, R. A.; CRESPO, A. J. C.; CERQUEIRO, D.: *Uso de la técnica SPH para el estudio de la interacción entre olas y estructuras*, **Ingeniería del Agua**, vol. 11, n. 2, p. 147-170, junho de 2004.

- GOTTARDI, G., VENUTELLI, M. : *Central scheme for two-dimensional dam-break flow simulation*, **Advances in Water Resources**, v. 27, pp. 259-268, 2004.
- HENDERSON, F. M.: **Open channel flow**, New York : MacMillan, 1966, 522 p.
- HERVOUET, J.-M.; JANKOWSKI, J. A.: *Comparing numerical simulations of free surface flows using non-hydrostatic Navier-Stokes and Boussinesq equations*, **Proceedings of the 4th Conference on Hydroinformatics**, Iowa City, Iowa (USA), 2000.
- IPPEN, A. T., DAWNSON, J. H., *Design of Channel Contractions*, **ASCE Transactions**, Vol. 116, 265-285, 1951.
- KATOPODES, Nikolaos, SCHAMBER, D. R. Applicability of dam break flood wave models. *J. of Hydraulic Eng.*, vol. 109, n. 5, p. 702-721, May 1983.
- KATOPODES, Nikolaos: *A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow*, **J. of Hydraulic Division**, v. 110, n. 4, p. 450-466, abril 1984.
- KATOPODES, Nikolaos; STRELKOFF, Theodor: *Computing two-dimensional dam-break flood waves*. **J. of Hydraulic Div.**, v. 104, n.9, p. 1269-1288, Sept. 1978.
- KESSERWARI, G.; GHOSTINE, R.; VAZQUEZ, J.; GHENAIM, A. e MOSÉ, R.: *Riemann solvers with Runge-Kutta discontinuous Galerkin schemes for the 1D shallow water equations*, **Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 134, n 2. pp. 243-255, 2008.
- LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to continuum mechanics**, 3rd Ed., Butterworth & Heinemann : Exeter, GB; 1993; 556 pg.
- LAI, Yong G.; WEBER, Larry J.; PATEL, V. C.; Nonhydrostatic Three-Dimensional Model for Hydraulic Flow Simulation. I: Formulation and Verification; **Journal of Hydraulic Engineering**, ASCE, vol. 129, nº 3, p. 196-205, 2003.
- LAI, Yong G.; WEBER, Larry J.; PATEL, V. C.; Nonhydrostatic Three-Dimensional Model for Hydraulic Flow Simulation. II: Validation and Application; **Journal of Hydraulic Engineering**, ASCE, vol. 129, nº 3, p. 206-214, 2003.
- LAI, Wencong, KHAN, Abdul A.: *Modeling dam-break flood over natural rivers using Discontinuous Galerkin Method*, **Journal of Hydrodynamics**, 24(4): 467-478, 2012.
- MAHMOOD, K.; YEVJEVICH, V.: **Unsteady flow in open channels**, Fort Collins : Water Resources Publications, 1975, 3 volumes.
- MALISKA, Clovis R.: **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional : fundamentos e coordenadas generalizadas**, Rio de Janeiro : LTC editora, 1995, 424 p.
- MARCACUZCO, Jesus: **Simulação numérica de escoamentos rasos usando o método dos volumes finitos**, São Paulo : USP, tese de doutorado, 1998.
- MARILES, Óscar A. Fuentes; ROMERO, Javier Osnaya: **Rotura de embalses** : cap. 25 del manual de ingeniería de rios, Cidade do México : Instituto de Ingeniería UNAM, vol. 596, dez 1997.
- MASCARENHAS, Flávio C. B.: **Modelação matemática de ondas provocadas por ruptura de barragens**, Rio de Janeiro : UFRJ/COPPE, Tese de Doutorado – UFRJ. 291 p., 1990.
- MASCARENHAS, Flávio C. B.; SILVA, Rui C. V. da: *Alternativas da metodologia para a propagação de ondas de ruptura de barragens*. In: **SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS** (7. : 1987 : Salvador). **Anais**. São Paulo : ABRH, v. 3, p. 34-42., 1987.

- MILLER, S., and CHAUDRHY, M.H.: *Dam-break flows in curved channel*: **Journal of Hydraulic Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 115, no. 11, p. 1465-1478., 1989.
- MOHAPATRA, Pranab K.; CHAUDHRY, M. Hanif: Numerical solution of Boussinesq equations to simulate dam-break flows, **Journal of Hydraulic Engineering** : ASCE, vol 130, n. 2, pg. 156-159, February, 2004.
- NASCIMENTO, Maria Francisca: **Aproximação das Equações da ‘Classe Boussinesq’ no Processo de Geração da Onda na Interface Sólido-Líquido: uma Abordagem Numérico-Experimental com Compromisso de Engenharia**; dissertação de Mestrado, UNESP – Ilha Solteira, 110 pg., 2001.
- NOGUEIRA, Vicente de P. Q. **A mathematical model of progressive earth dam failure**. Fort Collins : Colorado State Univ.,137 p. Tese (Doutorado) - Colorado State University, 1984.
- PASINATO, Hugo; TUCCI, Carlos E. M.: *Modelo matemático para ondas abruptas em rios e canais*. **RBE. Caderno de Recursos Hídricos**, vol. 10, n. 2, p. 131-152, dez. 1992.
- PEREIRA, Osni, **Domínios da aplicabilidade de equacionamentos de ondas de ruptura de barragens**, São Paulo : USP, tese de doutorado, 1996.
- ROGER, S.; DEWALS, B. J.; ERPICUM, S.; SCHWANENBERG, D.; SCHÜTTRUMPF, H.; KÖNGETER, J.; PIROTON, M. *Experimental and numerical investigations of dike-break induced flows*, **Journal of Hydraulic Research**,47:3, 349-359, 2009.
- ROGER, S.; KÖNGETER, J.; SCHÜTTRUMPF, H.; ERPICUM, S.; ARCHAMBEAU, P.; PIROTON, M.; SCHWANENBERG, D.; DEWALS, B. J.: *Hybrid modeling of dike-break induced flows*, **River Flow 2010**.
- SAKKAS, John G.; STRELKOFF, Theodor: *Dambreak food in a prismatic dry channel*, **J. of Hydraulic Division**, v. 99, n. 12, p. 2195-2216, dec. 1973.
- SCHLICHTING, Hermann: **Boundary layer theory**, 7ª edição, EUA : McGrawHill, 817 p., 1979.
- SCHWANENBERG, Dirk: **Die Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme**, PhD thesis, Aachen University, 2003.
- SCHWANENBERG, D. e HARMS, M.: *Discontinuous Galerkin Finite-Element Method for Transcritical Two-Dimensional Shallow Water Flows*, **Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 130, nº 5, pp. 412-421, 2004.
- SEABRA SANTOS, Fernando J. *Estudos Numéricos dos Domínios de Validade das Principais Teorias das Ondas em Água Pouco Profunda*, **Simpósio Luso-Brasileiro de Hidráulica e Recursos Hídricos (SILUB)**, 4, pg. 81-91, Lisboa, 1989 a.
- SEABRA SANTOS, Fernando J. *As aproximações de Wu e Green & Naghdi no Quadro Geral da Teoria da Água Pouco Profunda*, **Simpósio Luso-Brasileiro de Hidráulica e Recursos Hídricos (SILUB)**, 4, pg. 209-219, Lisboa, 1989 b.
- SILVA, Felipe Augusto Guedes da: **Um estudo de métodos de Galerkin descontínuos de alta ordem para problemas hiperbólicos**, 2015, UNICAMP; Campinas, SP. Dissertação de mestrado, 94 p..
- SILVA, Rui C. de V. da; MASCARENHAS, Flávio B.: *Estudo de onda provocada por ruptura*

- eventual de barragem durante a sua construção*. In: **SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS** (4. : 1989 : Lisboa). **Anais** : SILUSB. Lisboa : APRH, 1989, v. 2, p.350-358.
- STOKER, J. J.: **Water waves** : the mathematical theory with applications, New York : Interscience, 1957, 567 p.
- STRELKOFF, T.: *Numerical solution of Saint-Venant equations*, **J. of Hydraulic Division**, v. 96, n. 1, p. 223-252, jan. 1970.
- SUN, When-Yih; SUN, M. T. Oliver. *A modified Leap-frog scheme for shallow water equations*, **Computers & Fluids**, 52, pp. 69-72, 2011.
- TANNEHILL, John C.; ANDERSON, Dale A.; PLETCHER, Richard H.: **Computational fluid mechanics and heat transfer**, 2º ed., EUA : Taylor & Francis, 1997, 792 p.
- TORO, Eleuterio F.: **Shock-capturing methods for free-surface shallow flows**, Wiltshire : John Wiley and Sons, 2001, 309 p.
- TOSSOU, E E.: **Extension of the 2DH Saint-Venant /hydrodynamic model for flows with vertical acceleration**; Universidade de Laval, Canadá, tese de doutorado, 125 p., 2009.
- TOWNSON, J. M.; AL-SAHILI, A. H.: *Models of dam-break flow in R-T space*. **J. of Hydraulic Eng.**, v. 115, n. 5, p. 561-575, May 1989.
- TSENG, Ming Hseng; CHU, Chia R. : *Two-dimensional shallow water flows simulation using TVD-MacCormack Scheme*, **J. of Hydraulic Research**, v. 38, n. 2, pp.123-131, 2000.
- USDI (U. S. Department of the Interior): **Failure of Teton Dam**, dezembro de 1976, pag. irreg.
- VALLE, Karine Nayara F. **Métodos Numéricos de Euler e de Runge-Kutta**, UFMG, Monografia de Especialização, 40 p., 2012.
- VASCO, João Roberto Guimarães: **Desenvolvimento de software utilizando a técnica de SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) na geração de ondas de submersão**; Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Tese de Doutorado, 124 pg., 2014.
- XANTOPOULOS, Th.; KOUTITAS, Ch.: *Numerical simulation of two dimensional flood wave propagation due to dam failure*. **J. of Hydraulic Research**, v. 14, n. 4, p. 321-331, 1976.
- YASUDA, Hiroyasu: *One-Dimensional Study on Propagation of Tsunami Wave in River Channels*, **Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 136. nº 2. pp. 93-105, 2010.

APÊNDICE I – DEDUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO EM CANAIS

I – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT E DE ÁGUAS RASAS

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento não-permanente em canais é muito útil, tendo em vista os efeitos que inundações ou o trânsito de ondas podem causar às populações ribeirinhas. Esse tipo de escoamento é formalmente calculado a partir das equações de Navier-Stokes, que representam, em três dimensões, a relação entre a pressão e as velocidades em cada ponto do espaço e do tempo. As equações de Navier-Stokes não permitem, ainda, uma solução generalizada para qualquer tipo de escoamento. Para aplicações práticas, estas equações devem ser aproximadas através das Equações das Tensões Médias de Reynolds (RAMS, na sigla em inglês), com a aplicação de algum sistema de fechamento das equações de turbulência. A apresentação dessas equações não faz parte deste artigo, mas pode ser visualizada em, por exemplo, Schlichting (1968), Fortuna (2000) e Lai *et al.* (1993).

Estas equações adicionais, associado ao maior número de pontos de discretização em uma modelagem em três dimensões aumentam em muito o tamanho dos sistemas de equações a serem resolvidos computacionalmente, encarecendo ou mesmo inviabilizando as análises no nível de obras de engenharia.

Para contornar esse problema são muito utilizados modelos que simplificam os escoamentos para uma ou mesmo duas dimensões principais de escoamento.

As equações de Saint-Venant fazem uma aproximação das Equações de Navier-Stokes para uma dimensão, onde apenas as variações no sentido longitudinal do escoamento são representadas, sendo desprezadas as variações da velocidade e pressão na direção transversal, ou mesmo vertical. Elas podem ser deduzidas sem se partir da equação de Navier-Stokes, e foram primeiramente apresentadas por Adémas Jean-Claude Barré, Conde de Saint-Venant, em 1871.

Já no caso das Equações de Águas Rasas, que fazem a expansão das aproximações para duas dimensões, as variações ao longo da direção transversal são levadas em conta, mas ainda não se permite analisar variações de velocidade – e, portanto, acelerações – no plano vertical.

As Equações de Boussinesq, em uma ou duas dimensões, se diferenciam das equações anteriormente citadas – Saint-Venant ou Águas Rasas – por levar em conta variação da velocidade na direção vertical, o que causa uma aceleração do fluxo nessa direção. Isto inviabiliza a adoção de distribuição hidrostática de pressões realizadas nas equações anteriores, e pode permitir análises mais precisas, com menos variáveis para calibração.

Segundo Rouse e Ince (1957) – “History of Hydraulics” – Joseph Boussinesq estudou diversas áreas do conhecimento, com elasticidade, mecânica dos solos, termodinâmica, hidrodinâmica e hidráulica. Conseguiu emprego de professor universitário por influência de Saint-Venant, e substituiu-o na Academia de Ciências da França. Seus trabalhos versaram, basicamente, sobre comportamentos não lineares de parâmetros nos campos de estudos acima citados.

Existem equações chamadas de equações de Boussinesq nas áreas acima, mas este trabalho versa sobre a hidráulica de canais, buscando apresentar a dedução dessas equações de Boussinesq para escoamento não-permanente em canais, em duas dimensões, permitindo que escoamentos com fortes acelerações verticais possam ser analisados futuramente.

ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM CANAIS

Neste item são apresentadas as formulações matemáticas para o equacionamento do escoamento não-permanente de fluido incompressível em canais abertos. Fluido incompressível é uma simplificação de cálculo muito utilizada. Ela é válida para fluidos com coeficiente de elasticidade alto e em escoamentos com velocidades baixas quando comparadas com a velocidade das ondas elásticas no meio (conhecida também como velocidade do som no meio). Para escoamentos em canais abertos esta hipótese é perfeitamente aplicável. O equacionamento do problema parte das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento linear. A equação da conservação da energia pode ser desconsiderada no caso do estudo de fluidos incompressíveis. Não serão analisados neste trabalho a difusão ou convecção de substâncias no meio líquido.

Equações de Navier-Stokes

O movimento dos fluidos é representado matematicamente pelas equações de Navier-Stokes. Elas expressam a conservação da quantidade de movimento linear nas três direções espaciais. É usual agregar-se a elas a equação da continuidade (ou conservação da massa), mantendo-se a nomenclatura, agora ao conjunto. Uma dedução dessas equações pode ser encontrada, por exemplo, em Schlichting (1968), Fortuna (2000) ou Lai *et al.* (1993). A sua forma geral, tridimensional e para qualquer sistema de coordenadas para fluidos incompressível, pode ser expressa por:

$$\nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A.01})$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \vec{V}) \vec{V} \right] = \rho \vec{B} - \nabla p + \mu \operatorname{div}(\nabla \vec{V}) \quad (\text{A.02})$$

Onde: ρ – massa específica do fluido (kg/m³);

μ - Viscosidade do fluido (Pa.s);

$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ – vetor velocidade (m/s);

$\vec{B} = -g\vec{k}$ – vetor forças de massa (m/s^2);

g – aceleração da gravidade (m/s^2);

p – pressão (Pa).

A equação (A.01) representa a conservação da massa, enquanto a equação (A.02) vetorial (conjunto de três equações) representa a conservação da quantidade de movimento linear nas três direções espaciais.

Em coordenadas cartesianas, e considerando apenas as duas dimensões horizontais, as equações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.03})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{A.04})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{A.05})$$

Onde: F_x – Força de massa na direção x ;

F_y – Força de massa na direção y ;

$\tau_{xx}; \tau_{xy}; \tau_{yx}; \tau_{yy}$ – tensões nos fluidos, função da viscosidade e da rugosidade do contorno.

As tensões em um fluido Newtoniano, incompressível e isotrópico (caso da água) podem ser calculadas pelas expressões (A.06) a (A.08) a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.06})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.07})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.08})$$

Os valores das grandezas nessas equações são instantâneos. Uma forma prática de utilizar estas relações é dividir as incógnitas em um valor médio e uma flutuação turbulenta ao redor do valor médio, com média nula. Utilizando esta hipótese, e realizando as médias em um intervalo de tempo suficientemente curto – para podermos analisar a variação no tempo das grandezas – mas suficientemente longo – que permita obter uma flutuação com média nula – teremos a forma de Reynolds para as equações de Navier-Stokes, reproduzidas nas equações (A.09) e (A.10) abaixo:

$$\left\{ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \right. \quad (\text{A.09})$$

$$\left\{ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right) \right. \quad (\text{A.10})$$

Onde \bar{u} , \bar{v} e \bar{p} são valores médios temporais e u' e v' representam as flutuações turbulentas. Estas equações já se encontram simplificadas para o caso de escoamento em duas dimensões. A essas equações deve ser somada a equação (A.03) que representa a continuidade.

Para resolver estas equações, às quais incluímos duas novas variáveis (as flutuações turbulentas) necessitamos de equações de fechamento, conhecidas como modelo de turbulência. Este não é o objetivo deste trabalho, sendo apresentado apenas para introduzir as deduções seguintes.

EQUAÇÃO DE SAINT-VENANT

Nos casos em que uma das dimensões predomina sobre as demais (caso de rios, ou onde as seções transversais são praticamente constantes), podemos simplificar ainda mais a formulação, desprezando-se a direção transversal (normalmente a direção y). Essas equações possuem as seguintes hipóteses:

- Distribuição hidrostática de pressões;
- O escoamento é unidimensional;
- O fluido é incompressível e homogêneo (viscosidade e densidade constantes);
- A declividade do leito é suficientemente pequena para que possamos assumir que o seno do ângulo seja igual à sua tangente ($\sin \theta_x \cong \tan \theta_x = S_0$); e
- As perdas por atrito são consideradas iguais às que ocorrem em movimento permanente, com as mesmas profundidade e velocidade.

Conservação da Massa – Equação da Continuidade

A primeira equação deduz-se a partir do princípio da conservação da massa, ou seja, a massa que entra em um determinado volume de controle, menos a massa que sai deve ser igual à massa acumulada dentro desse volume. Em Mecânica dos Fluidos esta equação é conhecida como Equação da Continuidade. Assim, com base na Figura 01 e considerando largura unitária podemos dizer que:

$$\left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] - \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \quad (\text{A.11})$$

$$\left[uh - u \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - h \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{4} \right] - \left[uh + u \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + h \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{4} \right] = -u \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x - h \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \quad (\text{A.12})$$

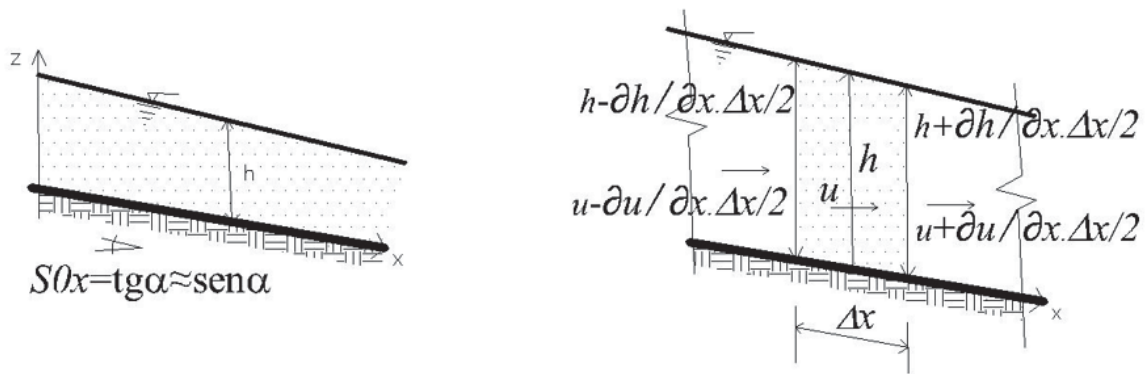


FIGURA 01 – descrição das características utilizadas na dedução das Equações de Saint-Venant

Que simplificada resulta na equação (A.13), que é a aplicação da equação (A.01) a uma dimensão.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção x

A conservação da Quantidade de Movimento (Q.M.) pode ser escrita como: a Q.M. que entra menos a Q. M. que sai, somada às forças que atuam sobre o elemento fluido é igual à taxa de acumulação da Q.M. dentro do volume. A Quantidade de Movimento é definida como sendo o produto da massa do fluido pela sua velocidade. Assim teremos:

$$\begin{aligned} Q.M._{entra} &= \left\{ (\rho uh)u - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho uh)u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \\ Q.M._{sai} &= \left\{ (\rho uh)u + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho uh)u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

As forças que atuam sobre o fluido podem ser agrupadas em três tipos: gravidade, pressão e forças dissipativas (função da viscosidade e da rugosidade do contorno das paredes).

A força da gravidade é a componente do peso do fluido, decomposta na direção do escoamento.

$$\begin{aligned} F_g &= \rho g(h\Delta x) \text{ sen } \theta_x \\ \text{mas: } \text{sen } \theta_x &\cong \text{tg } \theta_x = S_0 \\ F_g &= \rho g(h\Delta x)S_0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A força de pressão (hidrostática) é dada por:

$$F_p = \int_0^h p dz = \int_0^h \rho g(h - z) dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad (\text{A.16})$$

A força dissipativa pode ser representada a partir das equações conhecidas como de perda de carga em hidráulica, devidas a Darcy, Darcy-Weisbach, Manning, Chézy, entre outras. Todas dependem de coeficientes que representem a viscosidade e o contorno e podem ser resumidas à definição de uma inclinação da linha de energia, que é a perda de carga, representada por S_f . A equação final pode ser expressa com na equação (A.17), onde se remete a escolha da forma de cálculo da perda de carga à determinação de S_f .

$$F_s = \rho g h S_f \Delta x \quad (\text{A.17})$$

Tendo em vista que $\rho g = \gamma$; $S_f = \frac{h_p}{L} = J = \frac{\tau_0}{\gamma R_h}$ e, ainda, $\tau_0 = \frac{F_s}{(\Delta x)}$ e $R_h = h$ (canal de grande largura):

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho u^2 h - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 h) \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} - \left\{ \rho u^2 h + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 h) \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \\ & + \left\{ \rho g h S_0 \Delta x + \frac{1}{2} \rho g \left[\left(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] - \rho g h S_f \Delta x \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u h) \Delta x \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Combinando os termos, dividindo por $(\rho \Delta x)$ e lembrando da equação da continuidade:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} h^2 = gh(S_0 - S_f) \\ & \frac{\partial}{\partial t} (uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.13) e (A.19) representam uma das formas das Equações de Saint-Venant em sua forma conservativa. Se fizermos a expansão da equação e a sua simplificação posterior, chegaremos à forma não-conservativa da equação, que é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

A equação de águas rasas é a expansão das equações de Saint-Venant para duas dimensões horizontais, acrescentando a direção y à direção x e ao tempo t . A terceira dimensão espacial continua sendo a vertical z . O elemento de volume adotado é uma expansão do elemento unidimensional, e é mostrado na Figura 02. A Figura 03 apresenta as variáveis utilizadas e suas variações nas duas dimensões horizontais.

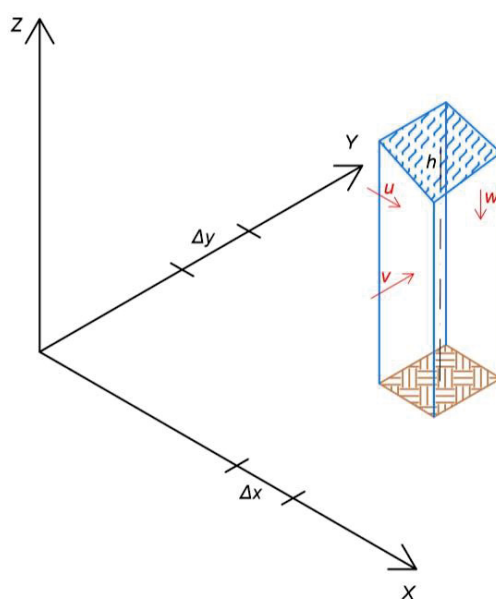


FIGURA 02 – ELEMENTO DE FLUIDO BIDIMENSIONAL

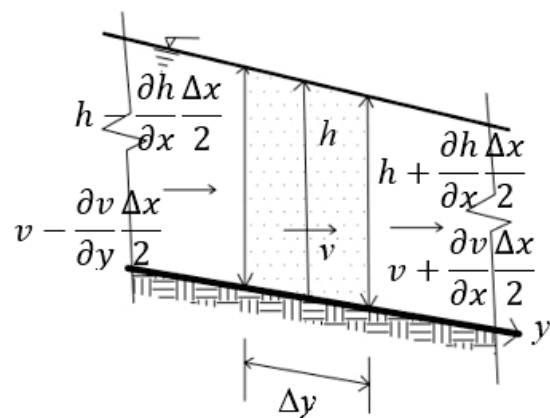
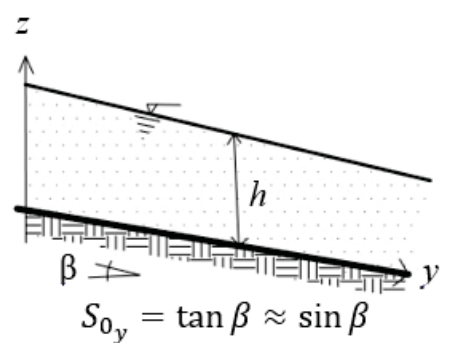
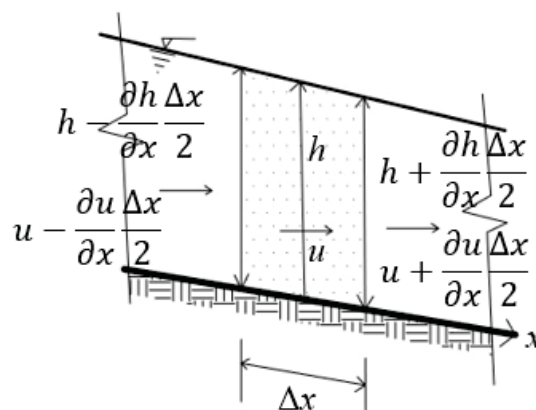
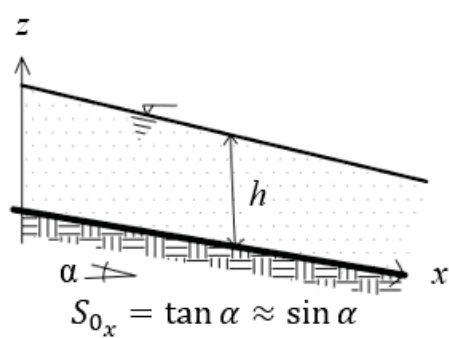


FIGURA 03 – VARIÁVEIS INVOLVIDAS NA DEDUÇÃO EM DUAS DIMENSÕES

Equação da Continuidade

Com o fluido entrando e saindo pelas quatro faces laterais (desprezando contribuições adicionais), a equação da continuidade pode ser expressa por:

$$\left\{ \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y + \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \right] - \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \right] \right\} - \frac{\partial h}{\partial t} \Delta y \Delta x \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Conservação da Quantidade de Movimento na direção \underline{x}

Na análise da conservação da Quantidade de Movimento, temos que levar em conta as contribuições nas duas direções espaciais. Assim, as equações (A.14) resultam para a direção \underline{x} :

$$\begin{aligned} (Q.M_{entra})_x &= \left\{ (\rho u h) u - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho u h) v - \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho u h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ (Q.M_{sai})_x &= \left\{ (\rho u h) u + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho u h) v + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho u h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

As parcelas das forças nas direções dos escoamentos são levemente alteradas, considerando as inclinações dos fundos nas direções \underline{x} e \underline{y} (respectivamente S_{0x} e S_{0y}), assim como as inclinações das linhas de energia (S_{fx} e S_{fy}). Agrupando-se os termos, teremos:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\rho u h) u - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho u h) v - \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho u h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ & - \left\{ (\rho u h) u + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y - \left\{ (\rho u h) v + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho u h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ & + \left\{ \rho g h S_{0x} \Delta x \Delta y - \rho g h S_{fx} \Delta x \Delta y \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \rho g \left[\left(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} - \left(h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u h \Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Reagrupando e simplificando:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 h) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho u h) v + \rho g h (S_{0x} - S_{fx}) = \frac{1}{2} \rho g \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u h) \quad (\text{A.24})$$

Ou, ainda, lembrando que a densidade é constante:

$$\frac{\partial}{\partial t} (uh) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 h) + \frac{\partial}{\partial y} (uh) v + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = gh (S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.25})$$

Conservação da Quantidade de Movimento na direção y

Da mesma forma, na direção y teremos que a equação da conservação da Quantidade de Movimento pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (Q.M._{entra})_y &= \left\{ (\rho v h) u - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho v h) v - \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ (Q.M._{sai})_y &= \left\{ (\rho v h) u + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho v h) v + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \end{aligned} \quad (A.26)$$

As parcelas das forças trocam de direção resultando, na junção de todas as parcelas:

$$\begin{aligned} &\left\{ (\rho v h) u - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y + \left\{ (\rho v h) v - \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ &- \left\{ (\rho v h) u + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v h) u \frac{\Delta x}{2} \right] \right\} \Delta y - \left\{ (\rho v h) v + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) v \frac{\Delta y}{2} \right] \right\} \Delta x \\ &+ \left\{ \rho g h S_{0y} \Delta x \Delta y - \rho g h S_{fy} \Delta x \Delta y \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \rho g \left[\left(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{2} - \left(h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v h \Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (A.27)$$

Rearranjando e simplificando, inclusive para fluido incompressível:

$$\frac{\partial}{\partial t} (v h) + \frac{\partial}{\partial x} (u v h) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 h) + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial y} = g h (S_{0y} - S_{fy}) \quad (A.28)$$

As equações (A.21), (A.25) e (A.28) formam as conhecidas Equações de Águas Rasas, reproduzidas a seguir em suas formas não-conservativa e conservativa:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (u h)}{\partial x} + \frac{\partial (v h)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (u h) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 h) + \frac{\partial}{\partial y} (u h) v + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = g h (S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (v h) + \frac{\partial}{\partial x} (u v h) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 h) + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial y} = g h (S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (A.29)$$

II – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ EM UMA DIMENSÃO

A dedução das equações de Boussinesq em uma dimensão são mostradas por Chaudhry (2008), no seu capítulo 12 e reproduzida a seguir.

Se as linhas de corrente do fluxo possuem curvaturas acentuadas, então a distribuição de pressões não pode ser hidrostática, devido à aceleração. Observando o escoamento bidimensional na vertical (eixos x e z) e adotando a hipótese de Boussinesq serão deduzidas as equações de Boussinesq, a partir das equações de Saint-Venant.

A hipótese de Boussinesq diz que a velocidade vertical varia de zero junto ao fundo até um máximo na superfície livre. Na dedução ainda assumiremos as seguintes hipóteses:

- Velocidade do fluxo na direção lateral é nula;
- A declividade do canal é baixa, de modo que $S_0 = \tan \theta \cong \sin \theta$. Na parte inicial da dedução será adotada igual a zero (horizontal); e
- A velocidade do fluxo na direção do escoamento (u) é uniforme na profundidade;
- O DATUM (referencial das cotas) situa-se no fundo (horizontal); e
- O canal é assumido inicialmente sem atrito ($S_f = 0$); ao final ela será introduzida.

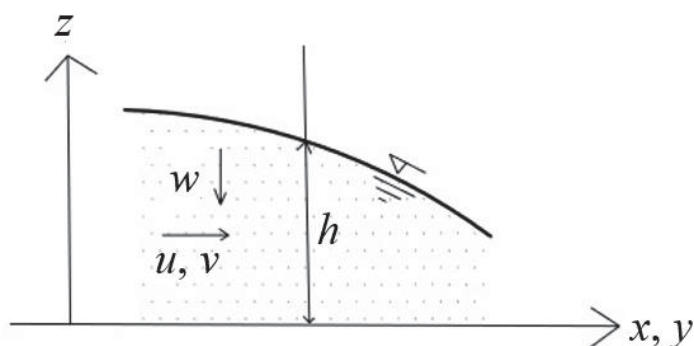


FIGURA 04 – PERFIL 2D PARA A DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ

Equação da Continuidade

A equação da Continuidade para um escoamento bidimensional pode ser escrita como abaixo, para escoamento de um fluido incompressível:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Multiplicando a equação por dz e integrando do fundo do canal ($z = 0$) até a superfície livre ($z = y$), obtemos:

$$\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^y \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A.31})$$

Pela regra de Leibniz ¹, a equação se torna:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \, dz + u \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{z=0} - u \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{z=y} + w|_{z=y} - w|_{z=0} = 0 \quad (\text{A.32})$$

Referindo as quantidades no fundo pelo índice \underline{b} e na superfície por \underline{s} , teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \, dz + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + w_s - w_b = 0 \quad (\text{A.33})$$

Podemos dizer da velocidade vertical na superfície livre, w_s , que:

$$w_s = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{A.34})$$

Como o referencial acompanha o fundo do canal, $\partial z_b / \partial x = 0$. Temos ainda que, para fundo rígido, $w_b = 0$. Então, baseado na equação (A.34), a equação (A.33) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u y}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.35})$$

Que pode ser expandida:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.36})$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (\text{A.37})$$

Agora, de (A.30) temos:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.38})$$

Visto que u é assumido constante na seção transversal com profundidade y , podemos integrar a equação (A.38) como:

$$w = -\frac{\partial u}{\partial x} z \quad (\text{A.39})$$

Substituindo a equação (A.37) na equação (A.39) resulta:

$$w = -\frac{1}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right) z \quad (\text{A.40})$$

¹ A regra de Leibniz define a derivação de uma integração, da seguinte forma (segundo M. R. Spiegel(1973) – Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas – eq. 15.14):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + F(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha} - F(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha}$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção z

A equação da quantidade de movimento na direção z pode ser escrita como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{A.41})$$

Multiplicando por z a equação (A.41), lembrando da equação da Continuidade e rearranjando:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(pz)}{\partial z} + gz + \frac{\partial(wz)}{\partial t} + \frac{\partial(uwz)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} - w^2 - w \left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (\text{A.42})$$

Sabendo que temos um referencial fixo, assim $\partial z / \partial t = \partial z / \partial x = 0$. Assim:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(pz)}{\partial z} + gz + \frac{\partial(wz)}{\partial t} + \frac{\partial(uwz)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} - w^2 \quad (\text{A.43})$$

Integrando esta equação ao longo da profundidade:

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{p}{\rho} dz &= \int_0^y \frac{1}{\rho} \frac{\partial(pz)}{\partial z} dz + \int_0^y gz dz + \int_0^y \frac{\partial(wz)}{\partial t} dz + \int_0^y \frac{\partial(uwz)}{\partial x} dz \\ &\quad + \int_0^y \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} dz - \int_0^y w^2 dz \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Aplicando novamente a regra de Leibniz e referenciando as quantidades na superfície livre e no fundo do canal pelos índices s e b , respectivamente, a equação (A.44) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{p}{\rho} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y (wz) dz - (wz)_s \frac{\partial y}{\partial t} + (wz)_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y (uwz) dz - (uwz)_s \frac{\partial y}{\partial x} \\ &\quad + (uwz)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (w^2z)_s - (w^2z)_b + \frac{1}{2} gy^2 - \int_0^y w^2 dz + \frac{1}{\rho} [(pz)_s - (pz)_b] \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

As condições de contorno na superfície livre e no fundo são descritas por:

• Superfície livre ($z = z_s$):

o $w_s = \frac{\partial y}{\partial t} + u_s \frac{\partial y}{\partial x}$ (equação (A.34));

o $p_s = 0$ (pressão atmosférica).

• Fundo do canal ($z = 0$):

o $w_b = 0$, pois $w = 0$ no fundo (fundo impenetrável);

o $p_b z_b = 0$, pois $z_b = 0$.

Baseado nessas condições a equação (A.45) resulta:

$$\int_0^y \frac{p}{\rho} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz + \frac{1}{2} g y^2 - \int_0^y w^2 dz \quad (\text{A.46})$$

Podemos observar que no caso de velocidade descendente nula (portanto sem acelerações verticais), a distribuição de pressão mostrada pela equação (A.46) acima é hidrostática, pois $w = 0$, resultando:

$$\int_0^y \frac{p}{\rho} dz = \frac{1}{2} g y^2 \quad (\text{A.47})$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção \underline{x}

A equação da quantidade de movimento na direção \underline{x} pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.48})$$

Baseado na equação (A.31), na equação da continuidade e rearranjando os termos, a equação (A.48) pode ser escrita:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.49})$$

Multiplicando a equação (A.49) por dz , integrando na altura (de $\underline{0}$ no fundo a \underline{y} na superfície livre) e aplicando as condições de contorno de superfície livre e de fundo já citadas, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u y) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 y) + \int_0^y \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0 \quad (\text{A.50})$$

Aplicando a regra de Leibniz resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u y) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 y) + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{p}{\rho} dz - \left(\frac{p}{\rho} \right)_s \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.51})$$

Como já visto, $p_s = 0$ e $\partial z_b / \partial x = 0$. Substituindo estas condições de contorno e a equação (A.46) na equação (A.51) e rearranjando os termos, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 y + \frac{1}{2} g y^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz - \int_0^y w^2 dz \right] = 0 \quad (\text{A.52})$$

Vamos simplificar o último termo da equação.

Substituindo a equação (A.39) na primeira expressão do último termo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right) z^2 dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \frac{y^3}{3} \right) \quad (\text{A.53})$$

Da mesma forma, a segunda e a terceira expressões do último termo resultam:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right) z dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{y^3}{3} \right) \quad (\text{A.54})$$

E

$$\int_0^y w^2 dz = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{y^3}{3} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{y^3}{3} \quad (\text{A.55})$$

Substituindo as equações (A.53) a (A.55) no terceiro termo da equação (A.52) e expandindo a expressão resultante, teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz - \int_0^y w^2 dz \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{y^3}{3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y^3}{\partial t} / 3 + \frac{y^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y^3}{\partial x} / 3 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{y^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz - \int_0^y w^2 dz \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{y^3}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Baseado na equação (A.36) a equação (A.57) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y w z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u w z dz - \int_0^y w^2 dz \right] \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ y^3 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Pois $\left\{ y^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -y^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}$, em função da equação (A.35) e da equação da continuidade.

A equação (A.58) apresenta o termo de correção devido à hipótese de Boussinesq.

Finalmente, a equação da conservação da quantidade de movimento na direção \underline{x} resulta da aplicação da equação (A.58) na equação (A.52):

$$\frac{\partial}{\partial t} (uy) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 y + \frac{1}{2} g y^2 - \underbrace{\frac{y^3}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\text{correção de Boussinesq}} \right\} = 0 \quad (\text{A.59})$$

As equações (A.35) e (A.59) são conhecidas como equações de Boussinesq. Alguns autores referem-se a estas equações como Equações de Sèrre, dentro de uma família de modelos da “Classe Boussinesq”. Segundo Basco (1983), na maioria das vezes os termos acrescidos à equação de Saint-Venant com produto de derivadas ou derivada terceira no espaço podem ser negligenciadas, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t}(uy) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{u^2y + \frac{1}{2}gy^2\right\} - \frac{y^3}{3}\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t} = 0 \quad (\text{A.60})$$

Observa-se que a hipótese de Boussinesq – distribuição não-hidrostática de pressões em função de aceleração vertical – altera o termo de pressão da equação de Saint-Venant que é originalmente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}gy^2\right) = yg\frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{A.61})$$

Para:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}gy^2 - \frac{y^3}{3}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t} + u\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \quad (\text{A.62})$$

Portanto, se incluímos os termos devidos à declividade (força de campo devido à gravidade) e rugosidade (atrito do escoamento com o contorno e internamente, função ainda da viscosidade) teremos que a equação (A.35) – equação da continuidade – se mantém inalterada (e igual à equação (A.13)), mas a equação (A.59) é alterada no seu termo direito, que deixa de ser nulo e passa a representar as forças adicionadas, como vista na equação (A.19). Assim:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial uy}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(uy) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{u^2y + \frac{1}{2}gy^2 - \frac{y^3}{3}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t} + u\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right\} = gy(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

Uma forma de escrever o termo de correção de Boussinesq é como uma derivada segunda total no tempo da profundidade, como mostrado na equação (A.64). No entanto, tal notação não é passível de utilização computacional, servindo apenas como referência.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{y^3}{3}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t} + u\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right\}}_{\text{correção de Boussinesq}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{3}\frac{d^2y}{dt^2}\right) \quad (\text{A.64})$$

A equação (A.63) é referenciada por Mahmood e Yevjevich (1975, pg. 62) como uma formulação de mais alta ordem da equação de Saint-Venant – o que significa que w não é mais nulo, como no caso das equações de Saint-Venant.

III – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ EM DUAS DIMENSÕES

A partir do exposto no item anterior, podemos expandir a hipótese de Boussinesq – existência de aceleração vertical em função da curvatura das linhas de corrente causando distribuição não hidrostática de pressões – para duas dimensões horizontais, criando uma alteração similar à das Equações de Saint-Venant para as Equações de Águas Rasas.

Este é o objetivo central deste trabalho: a apresentação destas equações, bem com as hipóteses adotadas durante a dedução.

Seguiremos o caminho proposto por Chaudhry, fazendo as correções necessárias para duas dimensões. Nessa dedução trocaremos a profundidade y adotada anteriormente – e que agora representa uma das dimensões horizontais – por h . A declividade do fundo e da superfície de energia são consideradas desde o início, ao contrário da dedução de Boussinesq em uma dimensão que, de acordo com Chaudhry (2008), entram ao final, por comparação com as equações de águas rasas.

Equação da Continuidade

A equação da Continuidade em duas dimensões horizontais e uma dimensão vertical (que será simplificada) pode ser escrita:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.65})$$

Multiplicando por dz e integrando em toda a profundidade h :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A.66})$$

Utilizando a regra de Leibniz e impondo as condições de contorno no fundo – onde ($z = 0$) resulta: $w_b = 0$, pois $w = 0$ no fundo (fundo impenetrável) – e na superfície – onde ($z = z_s$) resulta: $p_s = 0$ (pressão atmosférica) e, ainda, a noção de fundo horizontal – $\frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{\partial z_b}{\partial y} = 0$ – teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \left(u \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z=0} - \left(u \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z=h} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz + \left(v \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z=0} - \left(v \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{z=h} \\ + (w)_{z=h} - (w)_{z=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) \right] - u \frac{\partial z_s}{\partial x} - v \frac{\partial z_s}{\partial y} + w_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Podemos dizer da velocidade vertical na superfície livre:

$$w_s = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{A.68})$$

Retornando à equação (67), e lembrando que $z_s = h$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.69})$$

Que é idêntica à equação da continuidade nas Águas Rasas (equação (A.21), como era esperado. Expandindo a equação (A.69):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Reescrevendo a equação (A.65) multiplicada por h :

$$\begin{aligned} h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + h \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Mas:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{A.71})$$

Então:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (\text{A.72})$$

Integrando na altura h :

$$w = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) z \quad (\text{A.73})$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção z

A equação da conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção z pode ser escrita como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{A.74})$$

Multiplicando a equação (A.74) por z e rearranjando os termos, teremos:

$$z \frac{\partial w}{\partial t} + uz \frac{\partial w}{\partial x} + vz \frac{\partial w}{\partial y} + wz \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} z \frac{\partial p}{\partial z} - gz \quad (\text{A.75})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial wz}{\partial t} + \frac{\partial(uzw)}{\partial x} + \frac{\partial(vzw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial pz}{\partial z} \\ = \frac{p}{\rho} + \left(w \frac{\partial z}{\partial t} + w \frac{\partial(uz)}{\partial x} + w \frac{\partial(vz)}{\partial y} + w \frac{\partial(wz)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} \\ = \left[\frac{\partial wz}{\partial t} + \frac{\partial(uzw)}{\partial x} + \frac{\partial(vzw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial pz}{\partial z} \right] \\ - w \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(uz)}{\partial x} + \frac{\partial(vz)}{\partial y} + \frac{\partial(wz)}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Tendo em conta a equação da continuidade e que o sistema é fixo $\left(\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \right)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(uz)}{\partial x} + \frac{\partial(vz)}{\partial y} + \frac{\partial(wz)}{\partial z} \right) = w$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial pz}{\partial z} + gz + \frac{\partial wz}{\partial t} + \frac{\partial(uzw)}{\partial x} + \frac{\partial(vzw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} - w^2 \quad (\text{A.77})$$

Que é assemelhada à equação (A.43).

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção \underline{x}

A equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção \underline{x} pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + gS_{0x} - gS_{fx} \quad (\text{A.78})$$

Onde os termos S_{0x} e S_{fx} representam, respectivamente, a declividade do fundo na direção x e a declividade da linha de energia na mesma direção.

Tomando por base a equação (A.66) simplificando os termos e rearranjando, teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \underbrace{u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{continuidade}=0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.80})$$

Multiplicando a equação (A.80) por dz , integrando de $\underline{0}$ a \underline{h} , teremos:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial(uv)}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.81})$$

Aplicando a regra de Leibniz e as condições de contorno de fundo e de superfície ($z_s = h; z_b = 0; u_s = u_b = u; w_b = 0; w_s = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$), resulta:

$$\left[\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + \int_0^h \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz \right] - u \left[\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.82})$$

$$\left[\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz \right] = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (\text{A.83})$$

Que é similar à equação (A.50).

Voltemos à equação (A.77) e a integremos ao longo da altura:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz &= \int_0^h \frac{\partial wz}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial(uzw)}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial(vzw)}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial(w^2z)}{\partial z} dz + \int_0^h gz dz \\ &\quad + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz - \int_0^h w^2 dz \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Aplicando a regra de Leibniz e as condições de superfície e de fundo e, na sequência, simplificando os termos resultantes, teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (wuz) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (wvz) dz + \frac{1}{2} gh^2 - \int_0^h w^2 dz \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Similar à equação (A.46).

Aplicando a regra de Leibniz à equação (A.83) e reescrevendo, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz - \left(\frac{p}{\rho} \right)_s \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} &= gh(S_{0x} - S_{fx}) \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Lembrando que $\left(\frac{p}{\rho} \right)_s = 0$ e $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$ (horizontal), e substituindo a equação (A.85) na equação (A.86), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wzdz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h wuzdz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h wvzdz - \int_0^h w^2dz \right] \\ = gh(S_{0x} - S_{fx}) \end{aligned} \quad (A.87)$$

Centrando a atenção no último termo, teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad w = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)z \quad (A.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wzdz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] z^2 dz = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{h^3}{3} \right] \\ &= -\frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h^2 \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (A.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h wuzdz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] z^2 u dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) u \frac{h^3}{3} \right] \\ &= -\left[u \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h^2 u \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (A.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h wvzdz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] z^2 v dz = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) v \frac{h^3}{3} \right] \\ &= -\left[v \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h^2 v \frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (A.91)$$

$$\int_0^h w^2 dz = \int_0^h \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right]^2 z^2 dz = \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (A.92)$$

O último termo resulta, então da soma das equações (A.89) a (A.92):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h^2 \frac{\partial h}{\partial t} - \left[u \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h^2 u \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \left[v \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h^2 v \frac{\partial h}{\partial y} + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{h^3}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \Big\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (A.93)$$

O segundo termo da parcela acima contém a equação da continuidade, ou seja, é nula.

$$\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (A.94)$$

A parcela de correção da Equação de Saint-Venant devida à hipótese de Boussinesq resulta:

...

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right\} \quad (\text{A.95})$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção y

A equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção y pode ser escrita como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + gS_{0y} - gS_{fy} \quad (\text{A.96})$$

Tomando por base a equação (A.66) simplificando os termos e rearranjando, teremos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - \underbrace{v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{continuidade}=0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = gS_{0y} - gS_{fy} \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = gS_{0y} - gS_{fy} \quad (\text{A.98})$$

Multiplicando a equação (A.98) por dz , integrando de $\underline{0}$ a \underline{h} , teremos:

$$\int_0^h \frac{\partial v}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial(uv)}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial v^2}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial(vw)}{\partial z} dz + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (\text{A.99})$$

Aplicando a regra de Leibniz e as condições de contorno de fundo e de superfície ($z_s = h$; $z_b = 0$; $u_s = u_b = u$; $w_b = 0$; $w_s = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$), resulta:

$$\left[\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \int_0^h \frac{\partial(vwh)}{\partial z} dz + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz \right] - v \left[\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (\text{A.100})$$

$$\left[\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz \right] = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (\text{A.101})$$

Que é similar à equação (A.50), como a equação (A.83).

Aplicando a regra de Leibniz à equação (A.101) e as condições de superfície e de fundo e simplificando os termos resultantes, teremos:

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz - \left(\frac{p}{\rho}\right)_s \frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_b \frac{\partial z_b}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (\text{A.102})$$

Lembrando que $(p/\rho)_s = 0$ e $\frac{\partial z_b}{\partial y} = 0$ (horizontal), e substituindo a equação (A.45) na equação (A.102), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h wuz dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h wvz dz - \int_0^h w^2 dz \right] \\ = gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

Comparando as equações (A.103) e (A.87), observa-se a troca das derivadas nos 2º e 3º termos, enquanto no quarto termo ocorre apenas a troca da derivada espacial. Assim, por analogia, podemos escrever que o termo da correção de Boussinesq nessa equação resulta:

$$\begin{aligned} \dots \\ = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Que é assemelhada à equação (95) com a troca da derivada mais geral. Da mesma forma podemos acrescentar as forças devidas à declividade e à rugosidade.

RESUMO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ

Com isto, as equações conhecidas como equações de Boussinesq, aplicadas a canais com declividade e rugosidade de fundo podem ser escritas das seguintes formas:

- Em uma dimensão espacial:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2.h + g \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\text{correção de Boussinesq}} \right\} &= g.h.(S_0 - S_f) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.105})$$

- Em duas dimensões espaciais horizontais:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(u.h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2.h + g \cdot \frac{h^2}{2} - B \right\} + \frac{\partial(u.v.h)}{\partial y} = g.h.(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \frac{\partial(v.h)}{\partial t} + \frac{\partial(u.v.h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v^2.h + g \cdot \frac{h^2}{2} - B \right\} = g.h.(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{cases} \quad (\text{A.106})$$

Onde B representa a correção de Boussinesq, que é igual a:

$$B = \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.107})$$

CÁLCULO DAS DECLIVIDADES DO TERRENO E DA LINHA DE ENERGIA

Os termos de declividade de fundo (S_{0_x} e S_{0_y}) nas equações (A.105) e (A.106) são calculados baseados na geometria espacial do problema, em cada direção do movimento.

Os termos referentes à dissipação (S_{f_x} e S_{f_y}) nas mesmas equações podem ser calculados a partir de fórmulas de perda de carga. O usual em modelos computacionais de escoamento em canais é a utilização da fórmula de Manning, onde é determinado o coeficiente n de rugosidade (tendo em vista que o escoamento é de água e assumido sempre turbulento rugoso) – a unidade usual é $m^{-1/3}.s$. A equação de Manning pode ser expressa (levando em conta apenas uma direção de escoamento):

$$u = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (\text{A.108})$$

Onde podemos aproximar o raio hidráulico pela profundidade, como no caso de canais de grande largura. No caso da velocidade ao quadrado, para se preservar a informação da direção do escoamento, modifica-se para o produto da velocidade pelo seu módulo. Desta forma,

$$S_f = \frac{u^2 n^2}{R_h^{4/3}} = \frac{u^2 n^2}{h^{4/3}} = \frac{u|u|n^2}{h^{4/3}} \quad (\text{A.109})$$

No caso de escoamento em duas dimensões, a ideia é a mesma, porém o módulo é da velocidade total $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, enquanto a velocidade na direção considerada é mantida. Desta forma decompõe-se a linha de energia nas direções \underline{x} e \underline{y} diretamente. Assim:

$$S_{f_x} = \frac{u|V|n^2}{h^{4/3}} \quad (\text{A.110})$$

$$S_{f_y} = \frac{v|V|n^2}{h^{4/3}} \quad (\text{A.111})$$

Uma forma mais atual de calcular a perda de carga é a utilização da equação geral da resistência, ou equação de Darcy. Neste caso, é necessário indicar rugosidade equivalente de areia (k , em milímetros), que permitirá determinar o coeficiente de perda de carga, f (adimensional). Neste caso teremos:

$$h_p = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} \quad (\text{A.112})$$

$$\frac{h_p}{L} = S_f = f \frac{1}{4R_h} \frac{u^2}{2g} = f \frac{1}{4h} \frac{u^2}{2g} = \frac{f u^2}{8hg} \quad (\text{A.113})$$

O valor de f pode ser calculado, de maneira aproximada, mas geral, pela equação de Colebrook-White, válida para escoamento turbulento, em qualquer condição (liso, turbulento ou de transição):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log \left[\frac{k/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right] = -2 \log \left[\frac{k/(4R_h)}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right] \\ &= -2 \log \left[\frac{k}{14,8h} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

$$\text{Onde: } Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{\rho u 4R_h}{\mu} = \frac{\rho u 4h}{\mu}$$

No fluxo bidimensional, a consideração do produto do módulo da velocidade total pela componente da velocidade na direção do escoamento continua válida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHAUDHRY, M. Hanif: **Open-channel flow**, Springer Science & Business Media, 523 p., 2008.
- LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to continuum mechanics**, 3rd Ed., Butterworth & Heinemann : Exeter, GB; 1993; 556 pg.
- MAHMOOD, K.; YEVJEVICH, V; **Unsteady flow in open channels**; Water Resources Pub. : Fort Collins, CO, USA; 1975; 923 pg.; em dois volumes, com acréscimo de referências no terceiro volume.
- ROUSE, Hunter e INCE, Simon; **History of hydraulics**, Dover Public., Inc. : New York, 269 p., 1957.